UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

GABARITO DAS QUESTÕES ABERTAS – APLICAÇÃO: 27/01/03

VESTIBULAR 2002

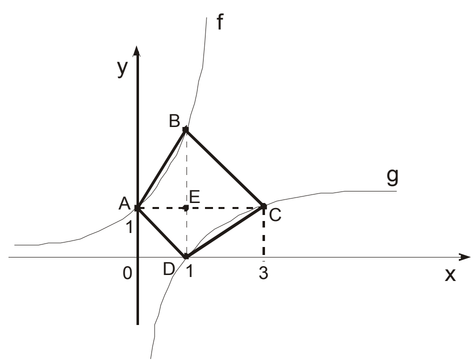
MATEMÁTICA

1. $f(x) = \sqrt{(2-x)^2} = |2-x|$

$$-1 \le f(x) \le 9 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \ge -1 \\ \text{e} \\ f(x) \le 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2-x| \ge -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{e} \\ |2-x| \le 9 \Rightarrow -9 \le 2-x \le 9 \end{cases} \Rightarrow -11 \le -x \le 7 \Rightarrow -7 \le x \le 11$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \le x \le 11\}$

2.



A função g é definida por $g(x) = \log_3 x$.

O ponto A tem ordenada $y = 3^0 = 1$ e o ponto D tem abscissa $x = 1$, pois $\log_3 1 = 0$.

A área do quadrilátero ABCD é a soma das áreas dos triângulos ACD e ABC.

Área do triângulo ABC: $\dfrac{AC\,.\,EB}{2} = \dfrac{3.(3^1 - 1)}{2} = 3\,u$

Área do triângulo ACD: $\dfrac{AC\,.\,ED}{2} = \dfrac{3.1}{2} = \dfrac{3}{2}\,u$

Área do quadrilátero ABCD: $3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}\,u$

3. $a_{12} = 53 + 11\,.\,30 = 383$

$S_{12} = \dfrac{a_1 + a_{12}}{2}\,.\,12 = (53 + 383).6 = 2\,616$

4. Elevando-se ao quadrado e somando-se as duas equações, tem-se:

$r^2 \,.\, \text{sen}^2\,\theta + r^2 \,.\, \cos^2\theta = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} \Rightarrow r^2 \,.\, (\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta) = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Dividindo-se a primeira equação pela segunda, tem-se $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\,\theta = \sqrt{3}$.

Como $r > 0$, então sen θ e cos θ são positivos.

Logo, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ rad ou $\theta = 60°$

5. det $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,x & 2 & \text{sen}\,y \\ \cos x & 3 & \cos y \end{bmatrix} = -(-\text{sen}\,x \,.\, \cos y - \text{sen}\,y \,.\, \cos x) = \text{sen}\,x \,.\, \cos y + \text{sen}\,y \,.\, \cos x = \text{sen}\,(x + y)$

Como $x + y = \dfrac{11\pi}{6}$, temos det $M =$ sen $\dfrac{11\pi}{6} = -\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

6. A equação dada representa o sistema $\begin{cases} x \,.\, \log\,k - 2y = 1 \\ 2x - y \,.\, \log\,k = 3 \end{cases}$.

Para que o sistema admita solução única, deve-se ter $\begin{bmatrix} \log\,k & -2 \\ 2 & -\log\,k \end{bmatrix} \neq 0$.

Logo, $-(\log k)^2 + 4 \neq 0 \Rightarrow (\log k)^2 \neq 4 \Rightarrow \log k \neq 2$ e $\log k \neq -2 \Rightarrow k \neq 100$ e $k \neq \dfrac{1}{100}$

7. Número de duplas que disputam o campeonato: 10

Número de elementos do espaço amostral: $C_{10,2} = \dfrac{10!}{2!\,8!} = 45$

a) p(duas duplas brasileiras) = $\dfrac{n(\text{duas duplas brasileiras})}{n(\text{espaço amostral})} = \dfrac{C_{6,2}}{C_{10,2}} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$

b) p(uma brasileira e uma estrangeira) = $\dfrac{n(\text{uma brasileira e uma estrangeira})}{n(\text{espaço amostral})} =$

$= \dfrac{C_{6,1} \,.\, C_{4,1}}{C_{10,2}} = \dfrac{6 \times 4}{45} = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$

8. Seja P(x; y)

$$d_{AP}^2 = d_{BP}^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y-3)^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6y + 9 \Rightarrow$$

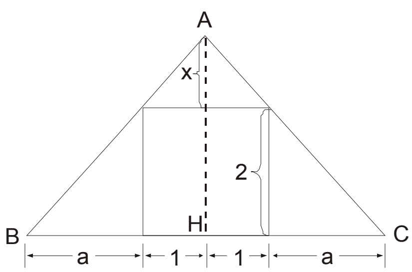
$$\Rightarrow \quad 4x + 4y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow P(x; 1-x)$$

$$d_{PC}^2 = (x-4)^2 + (1-x-1)^2 = 2x^2 - 8x + 16$$

A distância PC será mínima se o valor do trinômio $2x^2 - 8x + 16$ for mínimo, ou seja, para $x_{min} = \frac{8}{4} = 2$

Logo, P (2; –1)

9.



$h = x + 2$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{x}$$

$$S = \frac{1}{2} \,.\, (2a+2)\,(x+2) = (a+1)\,(x+2) = \left(\frac{2}{x} + 1\right) . \,(x+2) = \left(\frac{2+x}{x}\right) . \,(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{x} = 9 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 9x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 9x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como $AC^2 = AH^2 + HC^2$, então $\begin{cases} \text{se } x = 1, \text{ temos } AC^2 = 9 + 9 = 18 \quad \Rightarrow \quad AC = 3\sqrt{2}\text{ cm} \\ \quad \text{ou} \\ \text{se } x = 4, \text{ temos } AC^2 = 36 + \frac{9}{4} = \frac{153}{4} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{3\sqrt{17}}{2}\text{ cm} \end{cases}$

10. $z = \dfrac{3-4i}{2+3xi} = \dfrac{(3-4i).(2-3xi)}{(2+3xi).(2-3xi)} = \dfrac{6-12x}{4+9x^2} - \dfrac{(8+9x)}{4+9x^2}i$

$\mathrm{Re}(z) = 0 \Rightarrow \dfrac{6-12x}{4+9x^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Logo, $z = \dfrac{3-4i}{2+\frac{3}{2}i} = \dfrac{6-8i}{4+3i}$

$|z| = \dfrac{|6-8i|}{|4+3i|} = \dfrac{\sqrt{36+64}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{10}{5} = 2$