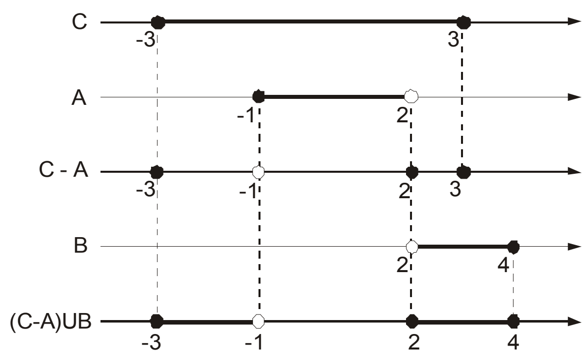
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

VESTIBULAR 2003 – SEGUNDA FASE

GABARITO DAS QUESTÕES ABERTAS – APLICAÇÃO: 12/01/04

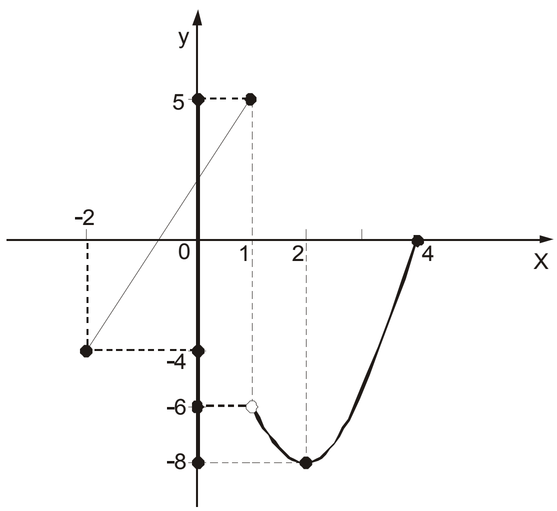
MATEMÁTICA

1.



$(C-A) \cup B = [\,-3, -1\,[\; \cup [2, 4] = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x < -1 \text{ ou } 2 \le x \le 4\}$

2.



se $x = -2$, $y = 3.(-2) + 2 = -4$
se $x = 1$, $y = 3.1 + 2 = 5$

$2x^2 - 8x = 0 \therefore 2x.(x - 4) = 0 \therefore x = 0$
$x = 4$

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2.2} = 2$ e $y_v = 2.(2^2) - 8.2 = -8$

$\text{Im}\,(3x + 2) = [-4, 5]$

$\text{Im}\,(2x^2 - 8x) = [-8, 0]$

$\text{Im}\,(f) = [-4, 5] \cup [-8, 0] = [-8, 5] = \{ y \in \mathbb{R} \mid -8 \le y \le 5 \}$

3. Seja $4^x = t$

$(4^x)^2 - 5.4^x + 4 = 0 \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

Portanto: $\begin{cases} 4^x = 4 \rightarrow x = 1 \\ \quad \text{ou} \\ 4^x = 1 \rightarrow x = 0 \end{cases}$ $\qquad S = \{ 0, 1 \}$

4. Pela definição de logaritmos: $\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \log_2 (1 - k)$, se $k < 1$. Como $\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \cos 2\theta$, então

$\cos 2\theta = \log_2 (1 - k)$. Mas $-1 \le \cos 2\theta \le 1$, logo $-1 \le \log_2 (1 - k) \le 1$

Isto implica: $\frac{1}{2} \le 1 - k \le 2$ ou $-\frac{1}{2} \le -k \le 1$ ou $\frac{1}{2} \ge k \ge -1$

Conclusão: A igualdade é satisfeita para todo k real tal que $-1 \le k \le \frac{1}{2}$.

5. Condição: o determinante da matriz principal é não nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\,\text{sen}\,u \\ \cos u & 1 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow 1 - 2\,\text{sen}\,u \cos u \ne 0 \Rightarrow 1 - \text{sen}\,2u \ne 0 \Rightarrow \text{sen}\,2u \ne 1 \Rightarrow 2u \ne \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow u \ne \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$$

Conclusão: Para todo real $u \ne \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$, o sistema admite solução única.

6. Termo geral $T_{p+1} = \binom{10}{p} \left(\sqrt{3}\right)^p \left(\sqrt[3]{2}\right)^{10-p}$. Esse termo será um número racional quando os radicais forem eliminados, o que ocorrerá quando, simultaneamente, p for par e 10–p for múltiplo de 3, com $0 \le p \le 10$.

Possibilidades:

p par $\Rightarrow$ p = 0, 2, 4, 6, 8, 10.

10 – p múltiplo de 3 $\Rightarrow$ p = 1, 4, 7, 10.

Assim, para ocorrerem ambas as condições, tomamos os valores comuns, isto é, a intersecção dos conjuntos {0, 2, 4, 6, 8, 10} e {1, 4, 7, 10}.

Portanto, existem 2 termos racionais: para p = 4 ou p = 10.

$p = 4 \rightarrow T_{4+1} = T_5 = \binom{10}{4} \left(\sqrt{3}\right)^4 \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 7\,560$ $\qquad p = 10 \rightarrow T_{10+1} = T_{11} = \binom{10}{10} \left(\sqrt{3}\right)^{10} \left(\sqrt[3]{2}\right)^0 = 243$

7. As raízes de f são: – 1, 1 + i e 1 – i.

A forma fatorada de f é: $f = k\,(x+1)\,.\,(x-1-i)\,.\,(x-1+i)$, com $k \in \mathbb{R}^*$

Como $f(0) = -4$, temos: $k\,(0+1)\,(0-1-i)\,(0-1+i) = -4 \Rightarrow k\,.\,2 = -4 \Rightarrow k = -2$

Então, $f = -2\,(x+1)\,(x-1-i)\,(x-1+i) = -2(x+1)\,(x^2-2x+2) = -2x^3+2x^2-4$

Logo, a soma dos coeficientes de f é $-2+2-4 = -4$

8. As retas procuradas, t_1 e t_2, são da forma $x - y + c = 0$, em que c é uma constante real.

Como $d_{C,t_1} = d_{C,t_2} = r$, temos

$$\left|\frac{2-0+c}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow \left|\frac{2+c}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow |\,2+c\,| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2+c=2 \\ \text{ou} \\ 2+c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ \text{ou} \\ c=-4 \end{cases}$$

Logo, as equações de t_1 e t_2 são: $x - y = 0$ e $x - y - 4 = 0$

9. Seja ℓ a medida do lado do quadrado e, então, $4\ell = 160 \Rightarrow \ell = 40$ m

Se d é a medida do diâmetro do círculo, então $d = 75\%\ \ell \Rightarrow d = \frac{75}{100}\,.\,40 = 30$ m e o raio do círculo é $r = \frac{d}{2}$, ou seja, $r = 15$ m

Sendo A_1 a área da praça original e A_2 a área da nova praça, temos:

$$\begin{cases} A_1 = \ell^2 \Rightarrow A_1 = 40^2 \Rightarrow A_1 = 1600\ m^2 \\ A_2 = \pi\, r^2 \Rightarrow A_2 = 3{,}14.15^2 \Rightarrow A_2 = 706{,}50\ m^2 \end{cases}$$

Logo, a redução foi de $A_1 - A_2 = (1600 - 706{,}50)\ m^2 = 893{,}50\ m^2$

10. O volume da peça é dado por: V=A.h, em que A é a área de sua base e h a sua altura.

Como $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ (área do triângulo eqüilátero), temos: $A = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2

Assim, $V = \frac{25\sqrt{3}}{4}\,.\,4\sqrt{3} = 75\ cm^3$

Dado que a densidade do ferro é 7,8 g/ cm^3, temos que

$$\left.\begin{matrix} 1\ cm^3 \rightarrow 7{,}8\ g \\ 75\ cm^3 \rightarrow m \end{matrix}\right\}\ m = 75.7{,}8\ g = 585\ g$$