UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

COMISSÃO COORDENADORA DO VESTIBULAR

PROCESSO SELETIVO UFES 2013

As bancas elaboradoras esperam obter da maioria dos candidatos respostas como as que seguem. No entanto, para a correção das provas, outras respostas também poderão ser consideradas, desde que corretas.

MATEMÁTICA

1ª QUESTÃO

A) Seja p o valor de cada prestação. Tem-se $((1324 - p)\cdot 1{,}1 - p)\cdot 1{,}1 - p = 0$, isto é, $p = 1602{,}04/3{,}31 = 484{,}00$ reais.

B) Seja p o valor de cada prestação. Tem-se $((1324 \cdot 1{,}1 - p)\cdot 1{,}1 - p)\cdot 1{,}1 - p = 0$, isto é, $p = 1762{,}244/3{,}31 = 532{,}40$ reais.

C) Sejam j a taxa mensal de juros e $x = 1 + j$. Tem-se $((1389 - 529)x - 529)x - 529 = 0$, isto é, $860x^2 - 529x - 529 = 0$, que é uma equação quadrática cujo discriminante é $\Delta = (-529)^2 - 4\cdot 860\cdot(-529) = 529\cdot(529 + 4\cdot 860) = 529\cdot 3969 = 23^2\cdot 63^2$. Assim, $x = \dfrac{-(-529) + \sqrt{23^2\cdot 63^2}}{2\cdot 860} = \dfrac{529 + 1449}{1720} = \dfrac{1978}{1720} = 1{,}15$. Como $x = 1 + j$ e $x = 1{,}15$, então $j = x - 1 = 1{,}15 - 1 = 0{,}15 = 15\%$.

2ª QUESTÃO

A) Tem-se $f(3) = a\cdot 100^3 = 2\cdot 10^9$. Logo, $a\cdot (10^2)^3 = 2\cdot 10^9$, isto é, $a\cdot 10^6 = 2\cdot 10^9$. Portanto, $a = 2000$.

B) Tem-se $f(t+h) = a\cdot 100^{t+h} = 3\cdot a\cdot 100^t = 3\cdot f(t)$.Logo, $100^h = 3$, isto é, $(10^2)^h = 3$, isto é, $10^{2h} = 3$. Então $2h = \log_{10} 3$ e, portanto, $h = \log_{10} 3/2 = 0{,}48/2 = 0{,}24$.

C) Tem-se $f(t) = a\cdot 100^t = a\cdot 2^{rt/h}$. Logo, $100^t = 2^{rt/h}$, isto é, $10^{2t} = 2^{rt/h}$. Então, $2t = \log_{10} 2^{rt/h} = (rt/h)\log_{10} 2$ e, portanto, $r = 2h/\log_{10} 2 = 2\cdot 0{,}24/0{,}30 = 1{,}6$.

3ª QUESTÃO

A) $p_{1,1} = 3/6 = 1/2$.

B) $p_{10,10} = 3^{10}/6^{10} = 1/2^{10} = 1/1024$.

C) $p_{10,1} = \left(10 \cdot 3^{10}\right)/6^{10} = 10/2^{10} = 10/1024 = 5/512$.

D) $p_{10,7} = \left(\binom{10}{7} \cdot 3^{10}\right)\Big/6^{10} = \left(\left((10 \cdot 9 \cdot 8)/(3 \cdot 2)\right) \cdot 3^{10}\right)/6^{10} = 120/1024 = 15/128$.

E) $p_{n,k} = \left(\binom{n}{k} \cdot 3^{n}\right)\Big/6^{n} = \binom{n}{k}\Big/2^{n}$. Assim, $p_{n,k}$ é máximo quando $\binom{n}{k}$ é máximo. Por outro lado, $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} > 0$ se, e somente se, $n-2k-1>0$ e, portanto, $\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k}$ se, e somente se, $k < (n-1)/2$. Analogamente, $\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k}$ se, e somente se, $k > (n-1)/2$. Logo, se n é par, existe apenas um valor de k para o qual $p_{n,k}$ é máximo, que é $k = n/2$, e se n é ímpar, existem dois valores de k para os quais $p_{n,k}$ é máximo, que são $k = (n-1)/2$ e $k = (n+1)/2$ (observe que, para n ímpar, tem-se $\binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$).

4ª QUESTÃO

A) Sendo $2\alpha = \beta = \theta$ e $\alpha + \beta + \theta = 180°$ temos que $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$ e $\theta = 72°$.

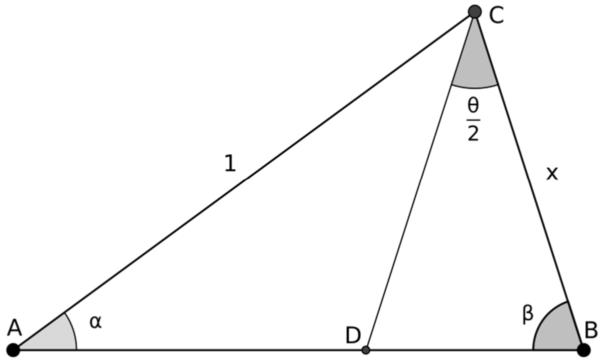
B) Ângulos $C\hat{B}D = 72°$, $B\hat{C}D = 36°$ e $C\hat{D}B = 72°$.

C) A bissetriz interna do triângulo *ABC* relativa ao vértice *C* determina sobre a reta *AB* um ponto *D* tal que

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \to \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \to x^2 + x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Outra solução: Os triângulos *BCD* e *ACD* são isósceles. Logo *BC* = *CD* = *AD* = *x*. Além disso, os triângulos *ABC* e *BCD* são semelhantes. Logo, pela proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \to \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \to x^2 + x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$



D) A bissetriz interna do triângulo *ABC* relativa ao vértice *A* determina sobre o segmento *BC* um ponto *M*. Sendo *ABC* isósceles, M é ponto médio de *BC* e a bissetriz é a altura do triângulo. Logo

$$sen(18°) = \frac{x/2}{1} \to sen(18°) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \to \cos(18°) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

5ª QUESTÃO

A) Prolongando a superfície do tronco de cone obtemos dois cones semelhantes: um deles tem base igual à base maior do tronco de cone, o outro tem base igual à base menor do tronco de cone e ambos têm o mesmo vértice. Sejam H e h as respectivas alturas desses cones (maior e menor). A diferença $d = H - h$ é a altura do tronco de cone. Por semelhança de triângulos temos que

$$q = \frac{r}{R} = \frac{h}{H}$$

Portanto, $r = qR$ e $h = qH$. Assim, chamando de V_T o volume do tronco de cone e V_C o volume do cone, temos,

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (R^2 H - r^2 h) \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 H\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{h}{H}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H (1 - q^3) \end{aligned}$$

e

$$V_C = \frac{1}{3}\pi R^2 d$$

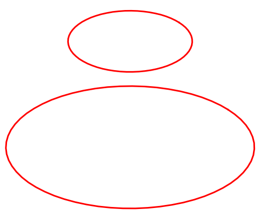
Logo,

$$\frac{V_T}{V_C} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H (1-q^3)}{\frac{1}{3}\pi R^2 d} = \frac{H(1-q^3)}{d} = \frac{H(1-q^3)}{H-h} = \frac{H(1-q^3)}{H-qH} = \frac{H(1-q^3)}{H(1-q)} = \frac{(1-q^3)}{(1-q)}$$

Donde

$$\frac{V_T}{V_C} = \frac{(1-q^3)}{(1-q)} = q^2 + q + 1$$

B) O pote é construído de acordo com a ilustração abaixo.



ERROR: undefined
OFFENDING COMMAND:

STACK: