



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
Pró-Reitoria de Graduação - Prograd
Serviço de Seleção, Orientação e Avaliação - SSOA

VESTIBULAR 2006 – 2ª FASE

GABARITO – MATEMÁTICA

Questão 01 (Valor: 15 pontos)

Tem-se que se x_1 é raiz complexa de $ax^2 + bx + c = 0$, então o seu conjugado também é raiz da equação.

Logo, $x_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$ e $x_2 = 1 - i$ são as raízes da equação.

Usando-se as relações entre coeficientes e raízes da equação,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad \text{tem-se que}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + i + 1 - i = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-b}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -2a$$

$$x_1 \cdot x_2 = (1 + i)(1 - i) = 1 + 1 \Rightarrow 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 2a$$

Sendo a imagem de $f(x) = ax^2 + bx + c$ o intervalo $] -\infty, -1]$, segue que -1 é o valor máximo

da função e portanto, $-1 = \frac{-\Delta}{4a}$

Logo

$$\Delta = 4a \Rightarrow b^2 - 4ac = 4a \Rightarrow (-2a)^2 - 4a(2a) = 4a$$

$$4a^2 - 8a^2 = 4a \Rightarrow -4a^2 = 4a$$

$$a^2 + a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad a = -1.$$

Como a função é quadrática $a \neq 0$, conseqüentemente $a = -1$, $b = 2$ e $c = -2$

Assim sendo $f(x) = -x^2 + 2x - 2$, portanto $f(2) = -4 + 4 - 2 = -2$

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

Com base no gráfico de $f(x) = a + b \cdot 2^{kx}$, conclui-se que a função $g(x) = b \cdot 2^{kx}$ sofreu uma translação de 1 unidade, logo $a = 1$

Além disso, pelo gráfico tem-se que $f(0) = 3$ e $f(-1) = 5$.

$$f(0) = 3 \Rightarrow 3 = 1 + b \Rightarrow b = 2$$

$$f(-1) = 5 \Rightarrow 5 = 1 + 2 \cdot 2^{-k} \Rightarrow 4 = 2 \cdot 2^{-k} \Rightarrow 2^2 = 2^{1-k} \Rightarrow 2 = 1 - k \Rightarrow k = -1$$

$$\text{Logo, } f(x) = 1 + 2 \cdot 2^{-x} = 1 + 2^{1-x}$$

Cálculo da função inversa $f^{-1}(x)$:

$$y = 1 + 2^{1-x} \Rightarrow y - 1 = 2^{1-x} \Rightarrow \log_2(y - 1) = 1 - x \Rightarrow x = 1 - \log_2(y - 1)$$

$$\text{portanto, } f^{-1}(x) = 1 - \log_2(x - 1)$$

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

$$d(A, B) + d(A, C) \leq 7 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2} \leq 7 \Rightarrow |x-1| + |x-4| \leq 7$$

$$\text{Usando a definição de módulo, tem-se } |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{e } |x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{se } x \geq 4 \\ -x+4, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

e estabelecendo-se o quadro resumo correspondente,

tem-se

	1	4
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$
$ x-4 $	$-x+4$	$x-4$

Portanto, para a inequação $|x-1| + |x-4| \leq 7$ tem-se

i. $x < 1$: $-x+1 - x+4 \leq 7$
 $-2x \leq 2 \Rightarrow x \geq -1$

$$S_1 = [-1, 1[$$

ii. $1 \leq x < 4$: $x-1 - x+4 \leq 7$
 $3 \leq 7$

$$S_2 = [1, 4[$$

iii. $x \geq 4$: $x-1 + x-4 \leq 7$
 $2x \leq 12 \Rightarrow x \leq 6$

$$S_3 = [4, 6]$$

Conseqüentemente,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-1, 1[\cup [1, 4[\cup [4, 6] = [-1, 6]$$

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

Considere

x – número de pessoas do Grupo I

y – número de pessoas do Grupo II

z – número de pessoas do Grupo III

De acordo com os dados apresentados, tem-se o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 800000 \\ 2x + 2y + 2z = 600000 \\ 3x + y + z = 500000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2+10+18) - (30+2+6) = -8$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (16+30+30) - (50+16+18) = -8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (6+50+48) - (90+10+16) = -12$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (10+16+54) - (48+6+30) = -4$$

$$x = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} \right) \cdot 100000 = \left(\frac{-8}{-8} \right) \cdot 100000 = 100000$$

$$y = \left(\frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \cdot 100000 = \left(\frac{-12}{-8} \right) \cdot 100000 = 150000$$

$$z = \left(\frac{\Delta_z}{\Delta} \right) \cdot 100000 = \left(\frac{-4}{-8} \right) \cdot 100000 = 50000$$

Outra solução – O mesmo sistema pode ser resolvido, por escalonamento:

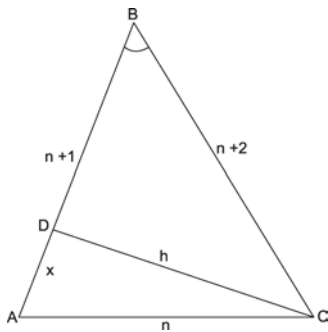
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -8 & -14 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{L_2}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -8 & -14 & -19 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 8L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2z &= 100000 & , & & z &= 50000 \\ y + 2z &= 250000 & , & & y &= 150000 \\ x - z &= 50000 & , & & x &= 100000 \end{aligned}$$

Questão 05 (Valor: 20 pontos)



Considerando-se n , $n+1$ e $n+2$ as medidas dos lados \overline{AC} , \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente, do triângulo ABC e usando-se a lei dos cossenos nesse triângulo, tem-se

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2) \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 - \frac{6}{5}(n^2 + 3n + 2) \Rightarrow \frac{6}{5}(n^2 + 3n + 2) = n^2 + 6n + 5$$

$$30n + 5n^2 + 25 - 6n^2 - 18n - 12 = 0 \Rightarrow n^2 - 12n - 13 = 0 \Rightarrow n = 13 \text{ ou } n = -1$$

Sendo n a medida do lado \overline{AC} do triângulo ABC, o valor a ser considerado é 13. Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos DAC e BDC, e considerando-se a medida de \overline{DC} igual a h , tem-se o sistema

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 13^2 \\ h^2 + (14 - x)^2 = 15^2 \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações tem-se $x^2 - (14-x)^2 = 169 - 225$, resultando $x = 5$.
 Substituindo-se o valor de x na equação $h^2 + x^2 = 13^2$,
 obtém-se $h^2 = 169 - 25 = 144$.
 Logo, $h = 12$ u.c.

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

Para estabelecer a região M, deve-se inicialmente determinar a equação da reta s que passa pelos pontos $A(4, -3)$ e $B(2, 0)$.

Sendo assim, substituindo-se os pontos A e B na equação $y = ax + b$, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} -3 = 4a + b \\ 0 = 2a + b \end{cases}$$

cuja solução é $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 3$

logo $s: y = -\frac{3}{2}x + 3$, e a reta $r: y = 1$.

Quando a região M gira em torno de Oy forma um tronco de cone sendo o seu volume obtido pela diferença entre o volume V_1 do cone maior de altura $h_1 = 3$ e raio $r_1 = 2$ e o volume V_2 do cone menor de altura $h_2 = 2$ u.c. e raio $r_2 = \frac{4}{3}$.

Tem-se que $r_1 = 2$ e $h_1 = 3$ correspondem à intersecção da reta s com os eixos Ox e Oy , respectivamente e r_2 é a abscissa do ponto de intersecção das retas r e s

$$r \cap s: \quad -\frac{3}{2}x + 3 = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{3}{2}x = -2$$

$$x = \frac{4}{3}, \text{ portanto } r \cap s = \left(\frac{4}{3}, 1 \right) \quad \text{logo } h_2 = h_1 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Assim sendo,

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 3 = 4\pi$$

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^2 \cdot 2 = \left(\frac{32\pi}{27} \right)$$

$$V = 4\pi - \left(\frac{32\pi}{27} \right) = \frac{108\pi - 32\pi}{27} = \frac{76\pi}{27} \text{ u.v.}$$

