SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
SERVIÇO DE SELEÇÃO, ORIENTAÇÃO E AVALIAÇÃO

VESTIBULAR 2003 – 2ª FASE
GABARITO – MATEMÁTICA

SOLUÇÕES ESPERADAS

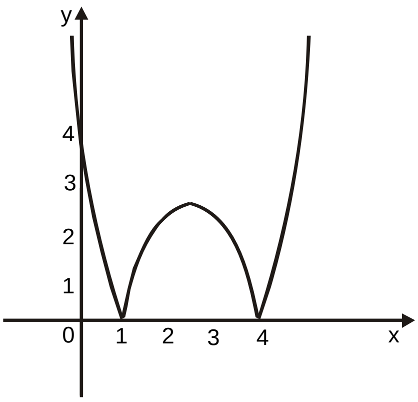
Questão 01

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|-x^2 + 5x - 4\right|$

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0$

$x = 1$ ou $x = 4$, $P_1(1,0)$, $P_2(4,0)$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$, $P_3(0,4)$



Questão 02

$p(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + b + c + d = 0$

$p(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 + b - c + d = 0$

$\Rightarrow b + d = 0$ e $c = -1$

$bd = -1$ e $b + d = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

Se $b = 1$, então $d = -1$. Logo, $p_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

Se $b = -1$, então $d = 1$. Logo, $p_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Questão 03

$3x + y - 9 = 0 \Rightarrow y = -3x + 9$

Consideremos a reta r que passa por C $(-1, 2)$ e é perpendicular à reta $y = -3x + 9$

r: $y = \frac{1}{3}x + b \Rightarrow 2 = \frac{-1}{3} + b \Rightarrow b = \frac{7}{3}$, ou seja, r: $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

Ponto de interseção das retas:

$-3x + 9 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{3}x = 9 - \frac{7}{3} \Leftrightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3 \,.\, 2 + 9 = 3$

Raio da circunferência: $r = d\,((-1,2),\,(2,3)) = \sqrt{(3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Equação da circunferência : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$

Questão 04

$z = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)$, com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\cos\alpha = \frac{-1}{2}$ e $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

$|w| = \sqrt{3+1} = 2$

$w = |w|(\cos\beta + i\,\text{sen}\beta$, com $\beta \in [0, 2\pi[$.

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen}\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$

$zw = |z.w|\ (\cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}(\alpha+\beta)) = |z.w|(\cos 150^\circ + i\text{sen}150^\circ)$

$\frac{z^2}{w} = \left|\frac{z^2}{w}\right| (\cos(2\alpha - \beta) + i\text{sen}(2\alpha - \beta)) = \left|\frac{z^2}{w}\right| (\cos 210^\circ + i\text{sen}210^\circ)$

Logo, $\cos(AOB) = \cos(210^\circ - 150^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Questão 05

Seja *a* a altura do retângulo. Assim,

$50 = 2a + 2r + \pi r \Leftrightarrow 2a = 50 - 2r - \pi r$

$A = 2r \,.\, a - \frac{\pi r^2}{2} = (50 - 2r - \pi r)r - \frac{\pi r^2}{2} = 50r - 2r^2 - \pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 50r - \left(2 + \frac{3}{2}\pi\right)r^2$

A área é máxima para $r = \frac{-50}{-2\left(2 + \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{50}{4 + 3\pi}$

$r = \frac{50}{4+3\pi}$ cm

Questão 06

Seja θ o ângulo de visão do observador no ponto A.
Pela Lei dos Cossenos,

$81 = 1 + 88 - 2.1.\ \sqrt{88}\ \cos\theta \Rightarrow 8 = 2\sqrt{88}\ \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{8}{2\sqrt{88}} = \dfrac{4}{\sqrt{88}}$, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \dfrac{16}{88}} = \sqrt{\dfrac{72}{88}}$

O valor da altura do avião é dado por

$h = \sqrt{88}\ \operatorname{sen}\theta = \sqrt{88}\ .\ \sqrt{\dfrac{72}{88}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$ km

Questão 07

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^{\circ}$

$\dfrac{r_1}{9 - r_1} = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow r_1 = 3$. Para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

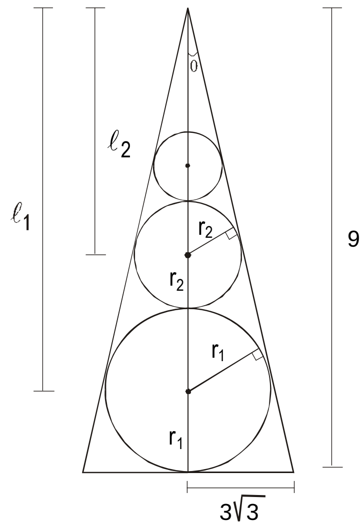
$\dfrac{r_k}{l_k} = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2r_k = l_k$ e $l_{k+1} = l_k - r_k - r_{k+1} \Rightarrow r_{k+1} = \dfrac{1}{3} r_k$

$(r_1, r_2, r_3, ...)$ é uma PG de razão $\dfrac{1}{3}$ e $r_1 = 3$.

A soma dos volumes das esferas é

$V = \dfrac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + ...) = \dfrac{4}{3}\pi\left(27 + 1 + \dfrac{1}{27} + ...\right) =$

$= \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{27}{1 - \dfrac{1}{27}}\right) = \dfrac{486\pi}{13}$ u.v.



Obs: Em toda a prova, outras formas de solução poderão ser aceitas desde que sejam pertinentes.

Em 19 de janeiro de 2003