Vestibular 2009 — 2ª fase
Gabarito — Matemática

Questão 01 (Valor: 15 pontos)
Se x minutos é o tempo que a impressora A trabalhou, então B trabalhou x – 10 minutos.
Se A tivesse trabalhado x – 10 minutos imprimiria 180 cópias, logo, A imprime $\frac{180}{x-10}$ cópias/minuto.

Se B tivesse trabalhado x minutos imprimiria 320 cópias, logo, B imprime $\frac{320}{x}$ cópias/minuto.

Assim, $\frac{180}{x-10}x+\frac{320}{x}(x-10)=480$.

Resolvendo essa equação, tem-se
$\frac{180}{x-10}x+\frac{320}{x}(x-10)=480 \Leftrightarrow \frac{180x^2+320(x-10)^2}{x(x-10)}=480 \Leftrightarrow \quad x^2-80x+1600=0 \Leftrightarrow (x-40)^2=0.$
Consequentemente x = 40.

Logo, a impressora A trabalhou 40 minutos e imprimiu $\frac{180}{x-10}x=\frac{180}{30}40=240$ cópias e a impressora B trabalhou 30 minutos e imprimiu 480 – 240 = 240 cópias.

Questão 02 (Valor: 15 pontos)

Se o gráfico de g é obtido do gráfico de f através de uma translação de uma unidade, na direção do eixo Ox, para a esquerda, seguida de uma translação de duas unidades, na direção do eixo Oy, para cima, então g(x) = 2 + f(x+1) = $2+\log_2(x+1)$.
Se o gráfico de h é simétrico ao gráfico de g em relação ao eixo Oy, então $h(x)=2+\log_2(1-x)$

Cálculo da inversa de h:
$y=2+\log_2(1-x) \Leftrightarrow y-2=\log_2(1-x) \Leftrightarrow 1-x=2^{y-2} \Leftrightarrow x=1-2^{y-2}$

Assim, $h^{-1}(x)=1-2^{x-2}$

$h^{-1}(x)>\frac{1}{2} \Rightarrow 1-2^{x-2}>\frac{1}{2} \Rightarrow 2^{x-2}<2^{-1} \Rightarrow x-2<-1 \Rightarrow x<1$
A solução é, portanto, o intervalo $]-\infty,1[$

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

Se o período de f é igual a π, então $\frac{2\pi}{m}=\pi$ e, portanto m = 2.

Usando-se a relação $1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$, obtém-se que $\sec^2\alpha=5$ o que acarreta $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Usando-se as condições $f(0)=2$ e $f(\frac{\pi}{4})=-1$ obtém-se $\begin{cases} A+B\cos\alpha=2 \\ A-B\,\text{sen}\alpha=-1 \end{cases}$ que é equivalente a $\begin{cases} A+\frac{B\sqrt{5}}{5}=2 \\ A-\frac{2B\sqrt{5}}{5}=-1 \end{cases}$.

Resolvendo-se o sistema encontra-se A = 1 e B = $\sqrt{5}$

Dessa forma, tem-se $f(x)=1+\sqrt{5}\cos(2x+\alpha)$.

Assim, $f(\frac{\alpha}{2})=1+\sqrt{5}\cos(2\alpha)=1+\sqrt{5}(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=1+\sqrt{5}(\frac{1}{5}-\frac{4}{5})=1-\frac{3\sqrt{5}}{5}$

Questão 04 (Valor: 15 pontos)

Escalonando a matriz ampliada do sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & k-1 & 4 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dividindo a 1ª linha por 2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & k-1 & 4 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Subtraindo a 3ª linha da 1a}]{\text{subtraindo a 2ª linha da 1ª multiplicada por 3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Subtraindo a 3ª linha da 2ª multiplicada por k - 1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-(k-1)(k+2) & 1-(k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$$

A matriz final B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$ é a matriz ampliada de um sistema equivalente ao sistema original.

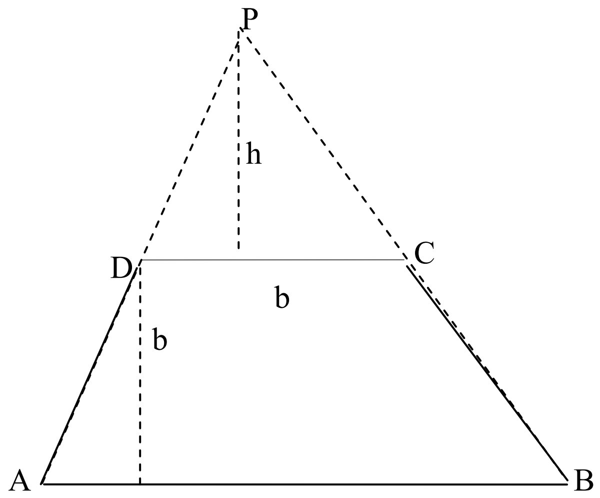
Analisando-se a última linha da matriz B tem-se

- se $k^2+k-6\neq 0$, ou seja, $k\neq 2$ e $k\neq -3$, o sistema é possível e determinado.
- Se $k^2+k-6=0$, ou seja, k = 2 ou k = – 3, tem-se duas possibilidades

  i) Para k = 2 o sistema é possível e indeterminado, uma vez que a última linha de B será toda igual a 0.

  ii) Para k = – 3 o sistema será impossível, uma vez que a última linha de B corresponde à equação 0 = 5.

Questão 05 (Valor: 20 pontos)



Na figura, considere c a medida do lado AB

Sendo A_1 a área do triângulo ABP, tem-se que $A_1 = \frac{c(h+b)}{2}$

Sendo A_2 a área do trapézio ABCD, tem-se que $A_2 = \frac{(c+b)b}{2}$

Logo, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{c(h+b)}{(c+b)b}$.

Usando a semelhança entre os triângulos DCP e ABP obtém-se

$\frac{h}{h+b} = \frac{b}{c}$ e, portanto, $c = \frac{b(h+b)}{h}$.

Da razão $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$ obtém-se $\frac{b+h}{b} = \frac{5}{2}$ (1) e $\frac{b+h}{h} = \frac{5}{3}$ (2).

Portanto, $c = \frac{b(h+b)}{h} = \frac{5}{3}b$ (3)

Substituindo-se (1), (2) e (3) na expressão de $\frac{A_1}{A_2}$ obtém-se

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c(h+b)}{(c+b)b} = \frac{c}{c+b}\frac{h+b}{b} = \frac{\frac{5}{3}b}{\frac{5}{3}b+b}\frac{5}{2} = \frac{5}{8}\frac{5}{2} = \frac{25}{16}$$

Questão 06 (Valor: 20 pontos)

A curva E, satisfaz à propriedade de uma elipse com centro na origem; eixo maior sobre o eixo Ox; focos nos pontos $F_1(-\sqrt{3},0)$ e $F_2(\sqrt{3},0)$ e distância entre os vértices igual a 4.

Uma equação dessa elipse é $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sendo a = 2 (distância dos vértices à origem) e $c=\sqrt{3}$ (distância dos focos à origem).

Sabendo-se que a, b e c satisfazem a relação $a^2=b^2+c^2$, obtém-se b = 1 e a equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

Uma parábola C com vértice na interseção de E com o eixo OY positivo, que é o ponto (0, 1), e que passa por $F_2(\sqrt{3},0)$ tem para equação $y - 1 = ax^2$ (I)

Substituindo-se F_2 em (I) obtém-se a = $-\frac{1}{3}$

Logo, uma equação de C é $y=-\frac{x^2}{3}+1 \Leftrightarrow x^2=3-3y$

Para encontrar as intersecções de E e C,

substitui-se $x^2=3-3y$ na equação de E e obtém-se

$3-3y+4y^2=4 \Leftrightarrow 4y^2-3y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ ou $y=-\frac{1}{4}$

Para y = 1, tem-se x = 0 o que corresponde ao ponto (0, 1) que é o vértice da parábola.

Para $y=-\frac{1}{4}$, obtém-se $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ que corresponde aos pontos $(\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4})$ e $(-\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{4})$.

Obs.: Outras abordagens poderão ser aceitas, desde que sejam pertinentes.

Salvador, 14 de dezembro de 2008

Nelson Almeida e Silva Filho
Diretor do SSOA/UFBA