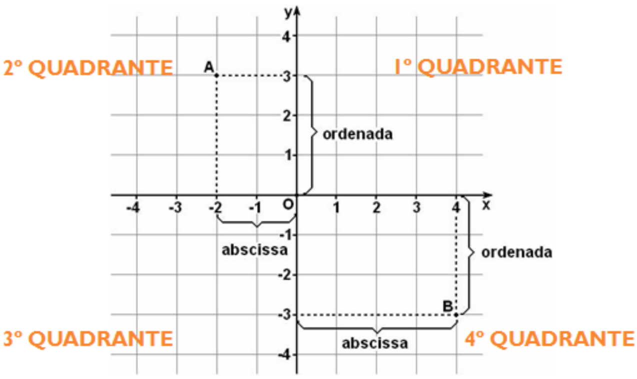
GEOMETRIA ANALÍTICA

PONTO

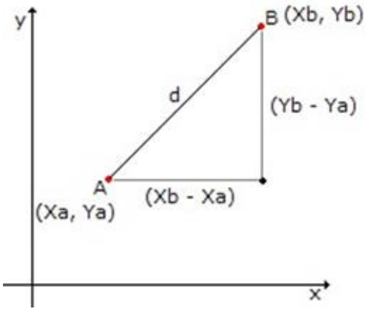
PLANO CARTESIANO

Vamos representar os pontos A (-2, 3) e B (4, -3) num plano cartesiano.



DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

A distância entre dois pontos é uma hipotenusa de um triângulo retângulo cujos vértices que não formam o ângulo reto são os pontos fornecidos.

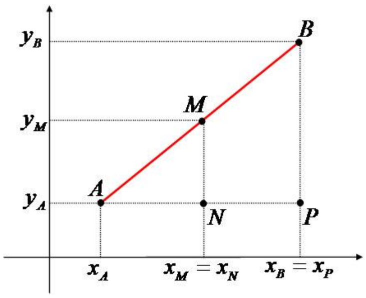


Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

PONTO MÉDIO

O ponto médio é o ponto que divide um segmento de reta em duas partes iguais.



As coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ são dadas por:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

MEDIANA E BARICENTRO

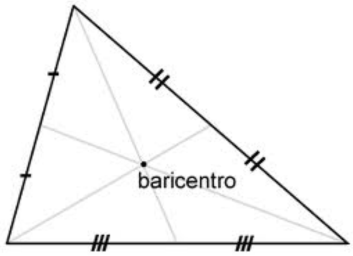
A mediana é o segmento que une o ponto médio de um dos lados do triângulo ao vértice oposto.

O baricentro é o encontro das três medianas.

As coordenadas do baricentro são dadas por:

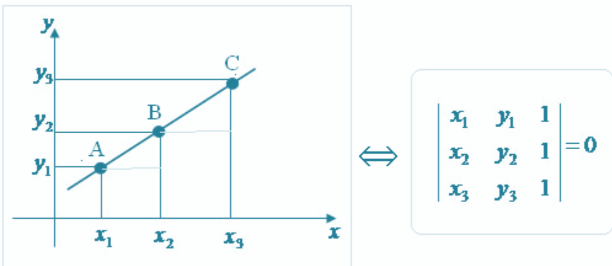
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$



CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Considere três pontos A, B e C. Se o determinante da matriz 3 x 3 formada pelos pontos A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) e C (x_3, y_3) for igual a zero, os três pontos estão alinhados e formam uma reta.



ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Se três pontos não estiverem alinhados (Det ≠ 0), eles formam um triângulo de área igual a:

$$área = \frac{|Det|}{2}$$

RETA

EQUAÇÃO GERAL

Três pontos determinam uma reta se o determinante for igual a 0.

A equação geral da reta possui a forma:

$$ax + by + c = 0$$

Quando montamos a equação da reta, precisamos ter cuidado para que:

- *a* seja sempre positivo;
- *a, b* e *c* não sejam frações.

INTERSECÇÃO DE DUAS RETAS

Para encontrar o ponto em que duas retas se interceptam devemos fazer um sistema com as equações das duas retas. A solução do sistema é o ponto de intersecção $P(x, y)$.

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

RETAS CONCORRENTES

Possuem um único ponto em comum (SPD).

$$(r\ x\ s) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

RETAS PARALELAS E DISTINTAS

Não possuem nenhum ponto em comum (SI).

$$(r\ \cap\ s = \emptyset) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

RETAS COINCIDENTES

Possuem infinitos pontos em comum (SPI).

$$(r = s) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

FORMAS DA EQUAÇÃO DA RETA

FORMA GERAL

$$ax + by + c = 0$$

FORMA REDUZIDA

$$y = mx + q$$

Onde m é o coeficiente angular e q é o coeficiente linear.

Para passar da equação geral para a reduzida basta isolar o y.

FORMA SEGMENTÁRIA

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Onde $P(p, 0)$ é o ponto onde a reta toca o eixo x e $Q(0, q)$ é o ponto onde a reta toca o eixo y.

Encontramos *p* fazendo $y = 0$ ou $p = -\frac{c}{a}$;

Encontramos *q* fazendo $x = 0$ ou $q = -\frac{c}{b}$.

COEFICIENTE ANGULAR E CÁLCULO DE m

O coeficiente angular de uma reta indica a sua inclinação. Pode ser dado por uma das três equações abaixo:

$$m = tg\theta$$

$$m = \frac{-a}{b}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

EQUAÇÃO DE UMA RETA PASSANDO POR $P(x_0, y_0)$

Quando temos o coeficiente angular m de uma reta e um ponto $P(x_0, y_0)$, substituímos os valores de m, x_0 e y_0 na equação:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

CONDIÇÕES DE PARALELISMO

Duas retas são paralelas quando possuem a mesma inclinação, ou seja, o mesmo coeficiente angular.

Sejam duas retas r e s, paralelas, então:

$$m_r = m_s$$

Feixe de retas paralelas: para determinar uma reta paralela, mantemos o a e o b, substituímos o x e o y por um ponto pertencente à reta desejada, e encontramos assim o coeficiente c da equação da reta.

CONDIÇÕES DE PERPENDICULARISMO

Duas retas são perpendiculares quando o produto dos seus coeficientes angulares for igual a -1.

Sejam duas retas r e s, perpendiculares, então:

$$m_r . m_s = -1$$

Feixe de retas perpendiculares: para determinar uma reta perpendicular, trocamos o módulo de a com o b, invertemos o sinal do b (coeficiente que multiplica o y), substituímos o x e o y por um ponto pertencente à reta desejada, e encontramos assim o coeficiente c da equação da reta.

DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Seja r uma reta de equação $(r): ax + by + c = 0$ e um ponto de coordenadas $P(x_0, y_0)$. A distância entre o ponto e a reta é dada por:

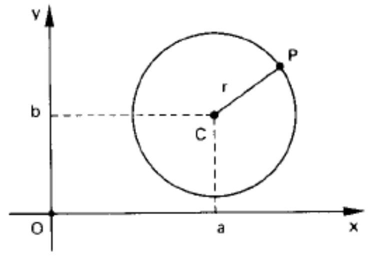
$$d_{P,r} = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

CIRCUNFERÊNCIA

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

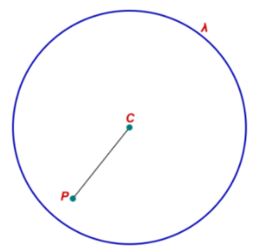
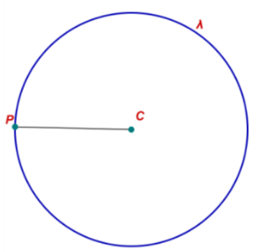
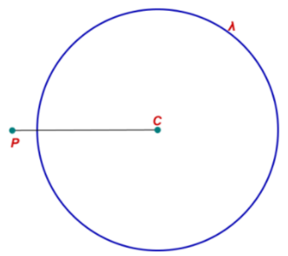
- a e b são as coordenadas do centro da circunferência C (a,b).
- r é a medida do raio da circunferência.
- x e y são as coordenadas de um ponto genérico P(x,y).



EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

• Se d < r, o ponto é interno à circunferência;	
• Se d = r, o ponto pertence à circunferência;	
• Se d > r, o ponto é externo à circunferência.	

Calculamos a distância entre o ponto e o centro da circunferência através da equação da distância entre dois pontos:

$$d^2=\Delta x^2+\Delta y^2$$

Outro método

$$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2-r^2$$

Substituindo $P(x_0,y_0)$ em f(x), temos:

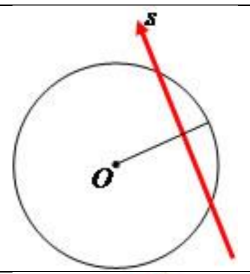
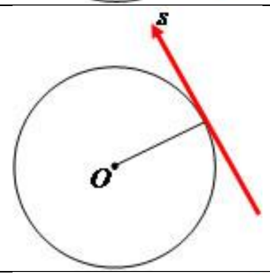
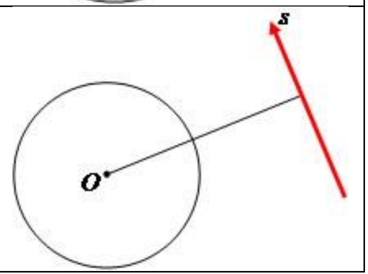
- $f(x_0,y_0)>0$, o ponto é externo;
- $f(x_0,y_0)=0$, o ponto pertence à circunferência;
- $f(x_0,y_0)<0$, o ponto é interno.

INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

Dada uma circunferência λ de equação $f(x,y)=0$, o plano cartesiano fica dividido em três subconjuntos:

- O subconjunto dos pontos (x,y) exteriores a λ, que é solução para $f(x,y)>0$.
- O subconjunto dos pontos (x,y) pertencentes a λ, que é solução para $f(x,y)=0$.
- O subconjunto dos pontos (x,y) interiores a λ, que é solução para $f(x,y)<0$.

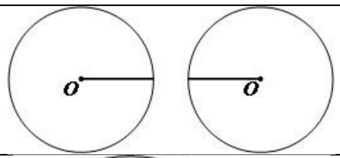
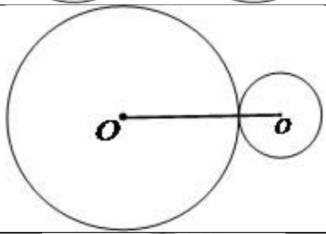
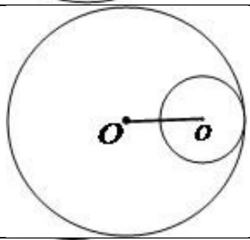
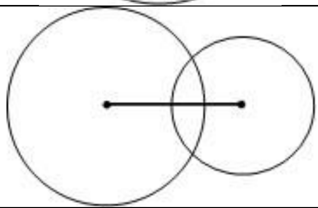
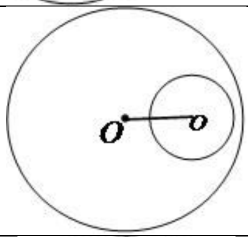
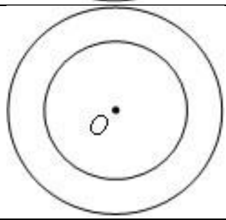
RETA E CIRCUNFERÊNCIA

• Se d < r, a reta é secante à circunferência.	
• Se d = r, a reta é tangente à circunferência;	
• Se d > r, a reta é externa à circunferência;	

Calculamos a distância entre a reta e o centro através da equação da distância entre ponto e reta:

$$d_{P,r}=\frac{|a.x_0+b.y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Circunferências exteriores: $d > r_1 + r_2$	
Circunferências tangentes exteriormente $d = \|r_1 + r_2\|$	
Circunferências tangentes interiormente $d = \|r_1 - r_2\|$	
Circunferências secantes $\|r_1 - r_2\| < d < r_1 + r_2$	
Circunferência de menor raio é interior à outra $0 \leq d < \|r_1 - r_2\|$	
Circunferências concêntricas (caso particular de circunferência interior) $d = 0$	

Calculamos a distância d através da equação de distância entre dois pontos. Esses dois pontos são os centros das circunferências.