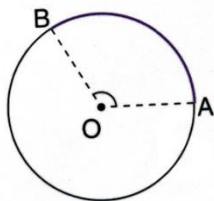


# MATEMÁTICA: TRIGONOMETRIA

## ARCOS E ÂNGULOS

### MEDIDA DE UM ARCO

É igual à medida do ângulo central correspondente.



### COMPRIMENTO DE UM ARCO

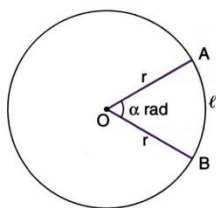
É a distância entre as extremidades A e B de um arco.

### UNIDADES DE MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

- GRAU: 1 grau corresponde a  $\frac{1}{360}$  da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.
- RADIANO: 1 radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido. Um arco de comprimento  $2\pi r$  (uma volta completa) mede  $2\pi$  rad.

Logo,  $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

### COMPRIMENTO DE UM ARCO



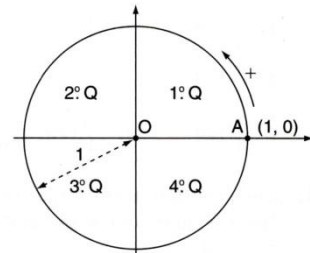
$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

Onde  $\alpha$  é a medida do arco em radianos,  $\ell$  é o comprimento do arco e  $r$  é a medida do raio da circunferência, na mesma unidade do comprimento do raio.

Para determinar o ângulo formado entre dois ponteiros de um relógio lembre-se que cada 60 minutos (1 hora), o ponteiro das horas percorre  $30^\circ$  e que a cada 1 min, o ponteiro dos minutos percorre  $6^\circ$ .

## A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Consideremos uma circunferência de raio igual a 1 (raio unitário), com centro no ponto (0,0) de um eixo cartesiano. O círculo limitado por essa circunferência fica dividido em quatro partes iguais denominadas quadrantes e indicadas na figura. Todos os arcos dessa circunferência têm origem no ponto A (1,0).



### ÂNGULOS NOTÁVEIS E CORRESPONDENTES NOS OUTROS QUADRANTES.

#### • EM GRAUS

1º Q ( $\theta$ )	2º Q ( $180^\circ - \theta$ )	3º Q ( $180^\circ + \theta$ )	4º Q ( $360^\circ - \theta$ )
30°	150°	210°	330°
45°	135°	225°	315°
60°	120°	240°	300°

DICAS:

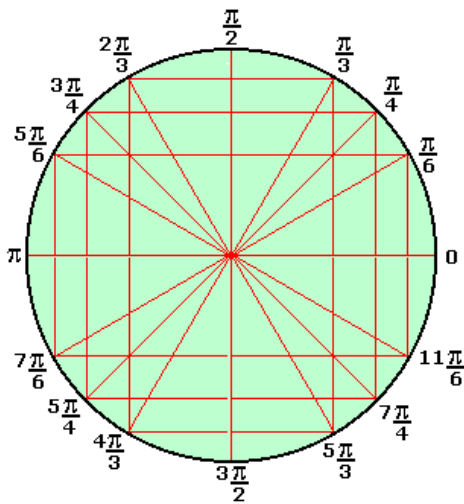
- O número das dezenas dos correspondentes de  $30^\circ$  são todos números ímpares, assim como o 3 do  $30^\circ$ .
- O número das dezenas dos correspondentes de  $60^\circ$  são todos números pares, assim como o 6 do  $60^\circ$ .

#### • EM RADIANS

1º Q ( $\theta$ )	2º Q "tira 1"	3º Q "soma 1"	4º Q "soma os dois do 2ºQ"
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$

DICAS: Para determinar o número que multiplica o arco do primeiro quadrante é só usar o "tira 1", "soma 1", "soma os dois do 2ºQ".

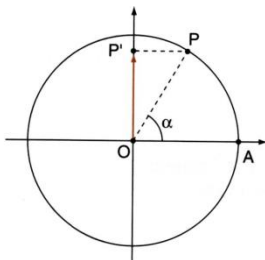
## CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA



## RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

### SENO

Eixo vertical (y): eixo dos senos

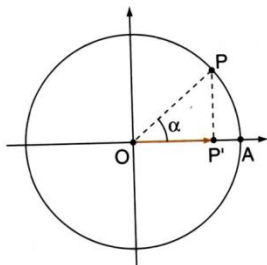


Obtemos o valor do seno projetando o ponto P de um arco sobre o eixo vertical.

$$\text{sen } \alpha = OP'$$

### COSENO

Eixo horizontal (x): eixo dos cossenos



Obtemos o valor do cosseno projetando o ponto P de um arco sobre o eixo horizontal.

$$\text{cos } \alpha = OP'$$

## RELAÇÕES ENTRE SENO E COSENO

### RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

## ARCOS COMPLEMENTARES

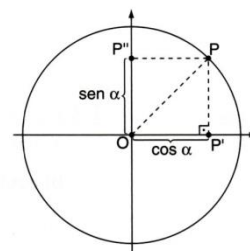
Quando a soma de dois arcos for igual a  $90^\circ$ , dizemos que eles são complementares. Nessa situação, seja  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dois ângulos complementares, teremos que:

$$\text{sen } \theta_1 = \text{cos } \theta_2 \quad e \quad \text{sen } \theta_2 = \text{cos } \theta_1$$

## TANGENTE

O eixo das tangentes é um eixo vertical que tangencia o ponto A(1,0).

Sabendo-se os valores de seno e cosseno, é possível calcular a tangente por:



$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

## OUTRAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

### COSSECANTE

Corresponde ao inverso do seno:

$$\text{cossec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

### SECANTE

Corresponde ao inverso do cosseno:

$$\text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta}$$

### COTANGENTE

Corresponde ao inverso da tangente

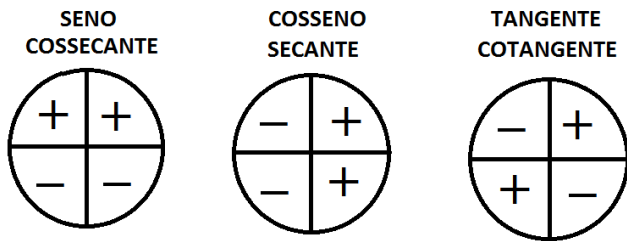
$$\text{cotg } \theta = \frac{1}{\text{tg } \theta}$$

## RELAÇÕES DECORRENTES

$$\text{sec}^2 \theta = 1 + \text{tg}^2 \theta$$

$$\text{cossec}^2 \theta = 1 + \text{cotg}^2 \theta$$

## SINAIS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



## TRIÂNGULOS QUAISQUER

### LEI DOS SENOS

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$$

### LEI DOS COSENOS

Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, diminuída do dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

### AS DEMAIS VOLTAS NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

A um mesmo ponto P na circunferência estão associados infinitos ângulos que atendem a seguinte exigência:

$$\theta + 2k\pi, \quad \text{sendo } k \text{ um número inteiro}$$

Ou em graus:

$$\theta + k \cdot 360^\circ, \quad \text{sendo } k \text{ um número inteiro}$$

Da mesma forma, podemos reduzir qualquer ângulo à primeira volta da seguinte forma:

- Se ele estiver em graus, divida por  $360^\circ$ . O resto é o ângulo no primeiro quadrante.

Exemplo:  $1260^\circ = 180^\circ$ .

$$\begin{array}{r} 1260 \quad | \quad 360 \\ -1080 \quad | \quad 3 \\ \hline 180 \end{array}$$

- Se ele estiver em radianos, divida o numerador pelo dobro do denominador. Substitua o numerador pelo resto da divisão.

Exemplo:  $\frac{23\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ .

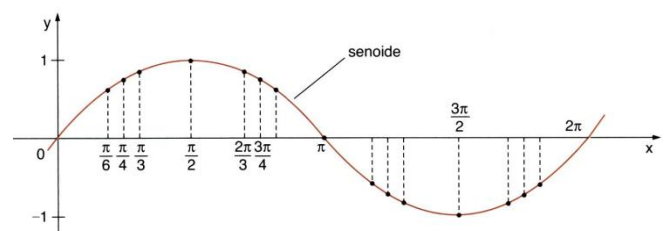
$$\begin{array}{r} 23 \quad | \quad 12 \\ -12 \quad | \quad 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

### FUNÇÕES PERIÓDICAS

O menor intervalo de tempo em que ocorre a repetição de um determinado fato ou fenômeno As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas.

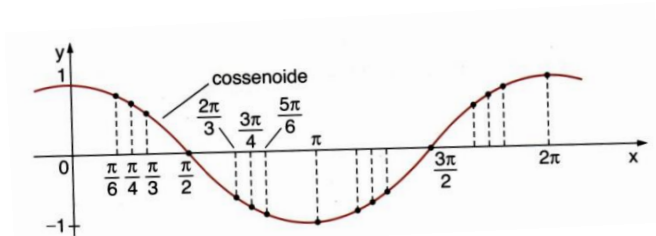
### FUNÇÃO SENO

- Período =  $2\pi$
- A função seno é uma função ímpar, ou seja,  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$
- Domínio:  $D = \mathbb{R}$
- Contradomínio:  $C = \mathbb{R}$
- Imagem:  $I = [-1, 1]$



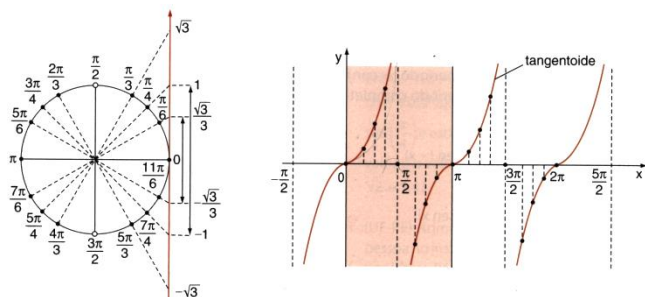
## FUNÇÃO COSENSO

- Período =  $2\pi$
- A função seno é uma função par, ou seja,  
 $sen(-x) = sen(x)$
- Domínio:  $D = \mathbb{R}$
- Contradomínio:  $C = \mathbb{R}$
- Imagem:  $I = [-1,1]$



## FUNÇÃO TANGENTE

- Período =  $\pi$
- A função tangente é uma função ímpar, ou seja,  
 $tg(-x) = -tg(x)$
- Domínio:  $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$
- Contradomínio:  $C = \mathbb{R}$
- Imagem:  $I = [-1,1]$



## TANGENTE

$$tg(a \pm b) = \frac{tg a \pm tg b}{1 \mp tg a \cdot tg b}$$

## RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE 2a

### SENO

$$sen 2a = sen(a + a) = 2 \cdot sen a \cdot cos a$$

### COSENSO

$$cos 2a = cos(a + a) = cos^2 a - sen^2 a$$

## TRANSFORMAÇÃO DE SOMAS EM PRODUTOS

### SENO

$$sen p + sen q = 2 \cdot sen \frac{p+q}{2} \cdot cos \frac{p-q}{2}$$

$$sen p - sen q = 2 \cdot sen \frac{p-q}{2} \cdot cos \frac{p+q}{2}$$

### COSENSO

$$cos p + cos q = 2 \cdot cos \frac{p+q}{2} \cdot cos \frac{p-q}{2}$$

$$cos p - cos q = -2 \cdot sen \frac{p+q}{2} \cdot sen \frac{p-q}{2}$$

## TRANSFORMAÇÕES

### FÓRMULAS DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

#### SENO

$$sen(a \pm b) = sen a \cdot cos b \pm sen b \cdot cos a$$

Dica: Na minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá, seno a cosseno b, seno b cosseno a.

#### COSENSO

$$cos(a \pm b) = cos a \cdot cos b \mp sen a \cdot sen b$$

Dica: coça a, coça b, vai coçando sem saber.