MATEMÁTICA: EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

DEFINIÇÃO

Equação polinomial ou algébrica é toda equação polinomial redutível à forma p(x) = 0 em que p(x) é um polinômio de grau n, sendo n ≥ 1, com coeficientes em ℂ, e cuja incógnita x pode assumir um valor qualquer em ℂ.

RAIZ

Um número complexo r é raiz da equação polinomial p(x) = 0 quando, substituindo x por r na equação e efetuando os cálculos obtemos p(r) = 0. Em outras palavras, r é raiz de uma equação p(x) 0 se r for raiz do polinômio p(x).

CONJUNTO SOLUÇÃO

É o conjunto de todas as raízes da equação, considerando o conjunto dos números complexos como conjunto universo.

- Grau do polinômio = 1: basta isolar o x.
- Grau do polinômio = 2: usar a fórmula do Bháskara.
- Grau do polinômio = 3 ou 4: Se a soma dos coeficientes for igual a zero, 1 é raiz. Se a soma dos coeficientes alternados for igual, -1 é raiz.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Todo polinômio de grau n, n ≥ 1, admite ao menos uma raiz complexa.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Um polinômio de grau n, n ≥ 1, pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_n)$$

Em que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes de p(x) e a_n é o coeficiente dominante de p(x).

- Dizemos que cada um dos polinômios do 1º grau é um fator de p(x);
- p(x) é divisível por cada um de seus fatores, individualmente, e também por qualquer produto desses fatores.

CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Toda equação polinomial de grau n, n ≥ 1, admite exatamente n raízes complexas.

MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

O número complexo r é uma raiz de multiplicidade m (m ∈ ℕ, m ≥ 1) da equação p(x) = 0 se a forma fatorada de p(x) é:

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x)\,, \qquad com\ q(r) \neq 0$$

Quando m = 1, dizemos que r é raiz simples (ou de multiplicidade 1); quando m = 2, dizemos que r é raiz dupla (ou de multiplicidade 2); quando m = 3, dizemos que r é raiz tripla (ou de multiplicidade 3); e assim por diante.

RELAÇÕES DE GIRARD

São relações entre os coeficientes e as raízes que permitem calcular as raízes para equações de grau n.

EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Com a ≠ 0.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

EQUAÇÃO DE 3º GRAU

Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Com a ≠ 0.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

EQUAÇÃO DE 4º GRAU

Sejam r_1, r_2, r_3 e r_4 as raízes da equação:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Com a ≠ 0.

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4 + r_3 \cdot r_4 = \frac{c}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = -\frac{d}{a} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a} \end{cases}$$

RAÍZES COMPLEXAS

Se um número complexo $z = a + bi$, com b ≠ 0, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Se o número complexo $z = a + bi$, com b ≠ 0, é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$, também é raiz com multiplicidade m dessa equação.

Esse teorema nos garante que, em uma equação de coeficientes reais, raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares ($z \ e \ \bar{z}$). Dessa forma, uma equação de grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real.

TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros

$$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \cdots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$$

com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, p ∈ Z e q ∈ Z*, com p e q primos entre si, é raiz da equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

O teorema das raízes racionais não garante a existência de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros.

Caso existam raízes racionais, o teorema fornece todas as possibilidades para tais raízes.