MATEMÁTICA: NÚMEROS COMPLEXOS

SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos surgiram para sanar uma das maiores dúvidas que atormentavam os matemáticos: Qual o resultado da operação $x^2 + 1 = 0$?

$x^2 = -1 \therefore x = \sqrt{-1}$

Por isso, foi criado um número especial, que denominamos algebricamente como i, que elevado ao quadrado resulta em -1, matematicamente:

$i^2 = -1 \therefore i = \sqrt{-1}$

Resolvendo a questão, temos que $x = i$.

Assim, foi criado um novo conjunto numérico denominado conjunto dos números complexos ou conjunto dos números imaginários, que representamos pela letra C. O conjunto dos números complexos possui, desse modo, a relação fundamental onde:

$$i^2 = -1$$

POTÊNCIAS DE i

Nas potências de i notam-se regularidades de quatro em quatro no expoente:

$$i^0 = 1;\ i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i$$
$$i^4 = 1;\ i^5 = i;\ i^6 = -1;\ i^7 = -i$$
$$\dots$$

Desse modo, para encontrar o resultado de qualquer potência, dividimos o expoente por 4 e resolvemos a potência utilizando como expoente o resto da divisão.

FORMA ALGÉBRICA

O número complexo possui uma parte real e outra imaginária. Como a parte imaginária conta com a presença do i, sua forma algébrica é:

$$z = a + bi$$

Re(z) = a (parte real)

Im(z) = b (parte imaginária)

- Um número complexo que não possui parte real (a = 0) é denominado número imaginário puro.
- Um número complexo que não possua a parte imaginária (b = 0) é denominado número real.
- Os números imaginários que possui ambas as partes são simplesmente chamados de números complexos.

CONJUGADO E MÓDULO

Todo número complexo $z = a + bi$ possui um conjugado representado por:

$$\bar{z} = a - bi$$

O módulo de um número complexo é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Para somar e subtrair números complexos deve-se efetuar as operações na parte real e imaginária separadamente.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

MULTIPLICAÇÃO

Para efetuar a multiplicação aplica-se a propriedade distributiva (chuveirinho):

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Exemplo:

$$(2 - i)(-3 + 2i) = -6 + 4i + 3i - 2i^2 = -4 + 7i$$

DIVISÃO

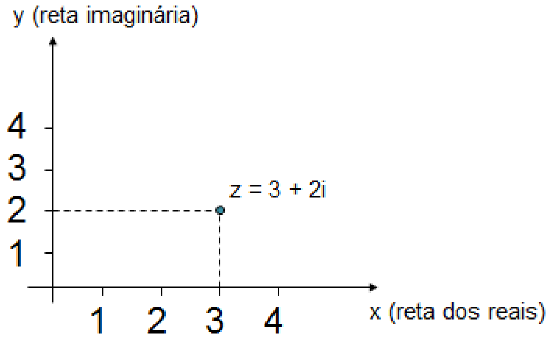
Para se dividir números complexos, deve-se multiplicar ambos os números pelo conjugado do complexo do denominador.

$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{(3+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2}$$
$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{5-i}{1+1} = \frac{5-i}{2}$$
$$\frac{3+2i}{1+i} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

PLANO DE ARGAND-GAUSS

Os números complexos podem ser representados num plano onde a reta das abscissas (eixo x) é a reta dos números reais e a das ordenadas (eixo y) é a reta dos números complexos. Esse plano é denominado plano de Argand-Gauss.

Exemplo: Representar $z = 3 + 2i$.



MÓDULO E ARGUMENTO

No gráfico, o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é o segmento de reta que vai do ponto origem O(0,0) até o ponto do P(a, b) do número complexo z. Pode ser representado por ρ (rô) ou |z|.

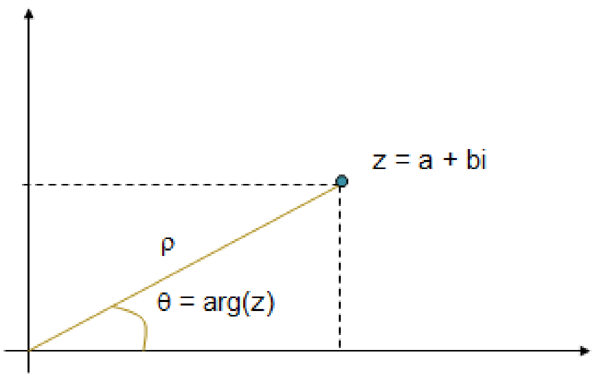
O argumento de z é o ângulo que este segmento de reta forma com o eixo das abscissas em sentido anti-horário.

Módulo (ρ):

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento (θ):

$$\theta = \begin{cases} cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ sen\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$



FORMA TRIGONOMÉTRICA

Utilizando as relações anteriores e aplicando-as à forma algébrica, obtemos a forma trigonométrica de um número complexo.

$$z = \rho(cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

MULTIPLICAÇÃO

Para multiplicar números complexos na forma trigonométrica utilizamos a fórmula:

$$z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2 \, [\cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i. sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

DIVISÃO

Para dividir números complexos na forma trigonométrica utilizamos a fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos\ (\theta_1 - \theta_2) + i. sen(\theta_1 - \theta_2)]$$

POTENCIAÇÃO

Para efetuar a potenciação entre números complexos na forma trigonométrica utilizamos esta fórmula, conhecida como 1º Equação de Moivre:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i. sen(n\theta)]$$

RADICIAÇÃO

Para efetuar a radiciação entre números complexos na forma trigonométrica utilizamos esta fórmula, conhecida como 2º Equação de Moivre:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i. sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$.

Se a raiz for quadrada, temos que descobrir para k = 0 e k = 1. Se a raiz for cúbica, fazemos k = 0, k = 1 e k = 2. E assim por diante.

Modo alternativo:

1) Encontrar o módulo e tirar a raiz enésima do módulo.
2) Encontrar o argumento e dividir por n para encontrar o θ_0.
3) Dividir 360° por n.
4) Somar o θ_0 com o valor obtido no item 3.
5) Preencher a tabela:

	cos θ	sen θ
θ_0		
θ_1		
θ_2		
...		

6) Encontrar as raízes já na forma algébrica utilizando os valores dos itens 1 e 5.