RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 13

a) Como o ângulo de giro do ponteiro é diretamente proporcional à velocidade, podemos escrever

$$\frac{210°}{240\,\text{km}} = \frac{x}{104\,\text{km}}.$$

Desse modo, $x = 104 \cdot 210/240 = 91°$.

Resposta: O ângulo mede 91°.

b) A função pedida tem a forma v(x) = ax + b, em que a e b são constantes reais. Sabemos que o gráfico de uma função linear é a uma reta cuja inclinação é **a** e cujo ponto de interseção com o eixo-y é (0, **b**). Assim, sabendo que a reta passa pelos pontos (20, 20) e (70, 65), encontramos o coeficiente a escrevendo

$$a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(65 - 20)}{(70 - 20)} = \frac{45}{50} = 0{,}9.$$

De posse de **a**, encontramos **b** usando um dos pontos dados. Tomando o ponto (20, 20), temos

$$\begin{gathered} v(20) = a \cdot 20 + b \\ 20 = 0{,}9 \cdot 20 + b \\ b = 20 - 18 = 2. \end{gathered}$$

Resposta: A função é v(x) = 0,9x + 2.

b’) A função pedida tem a forma v(x) = ax + b. Como a reta passa pelos pontos (20, 20) e (70, 65), temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 20a + b &= 20 \\ 70a + b &= 65 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira linha da segunda obtemos 50a = 45, donde a = 9/10. Substituindo, agora, o valor de a na primeira equação, obtemos 20.9/10 + b = 20. Desse modo, b = 20 – 18 = 2.

Resposta: A função é v(x) = 0,9x + 2.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 14

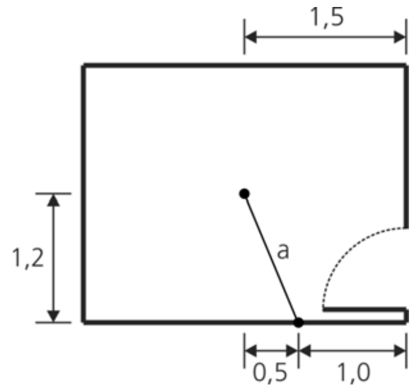
a) O cômodo, cuja área é superior a 6 m², tem perímetro igual a $2 \cdot 3{,}0 + 2 \cdot 2.4 = 10{,}8$ m. Desse modo, o número de tomadas é maior ou igual a 10,8/5 = 2,16. Logo, é preciso instalar ao menos 3 tomadas, espaçadas de 10,8/3 = 3,6 m.

Resposta: Devem ser instaladas ao menos 3 tomadas, com um espaçamento de 3,6 m entre elas.

b) O fio deverá subir 2,7 – 1,0 = 1,7 m verticalmente pela parede. Além disso, será preciso gastar **a** metros de fio para ligar o ponto do teto que está exatamente sobre o interruptor ao centro do cômodo, como mostra a figura ao lado.
Nesse caso,

$$a^2 = 0{,}5^2 + 1{,}2^2 = 0{,}25 + 1{,}44 = 1{,}69.$$

Logo, $a = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ m, e o fio deve medir 1,7 + 1,3 = 3,0 m.



Resposta: O fio deve medir 3 m.

Questão 15

a) Reescrevendo a equação, obtemos

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Podemos resolver essa equação usando a fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, a raiz positiva da equação é $x = (1 + \sqrt{5})/2$.

Resposta: O número áureo é $(1 + \sqrt{5})/2$.

b) Aplicando a fórmula recursiva de F(n), obtemos F(9) = 21 + 13 = 34, F(10) = 34 + 21 = 55 e F(11) = 55 + 34 = 89. Assim, a aproximação desejada para o número áureo é $89/55 \approx 1{,}6$.

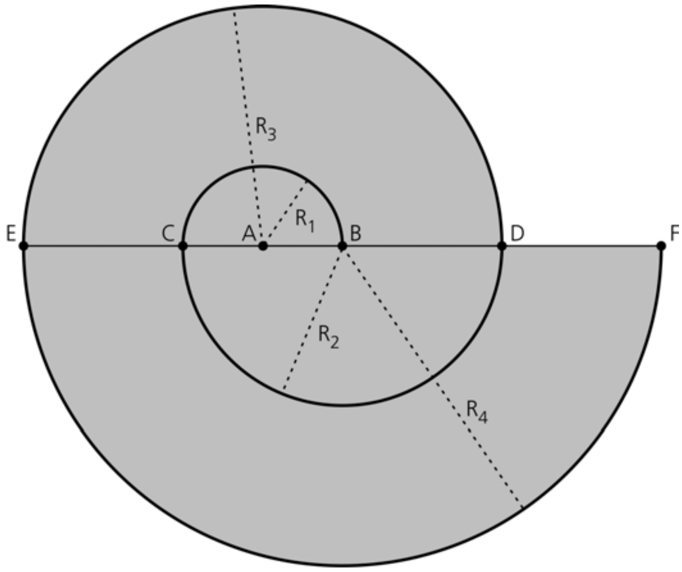
Resposta: O 10º termo da sequência é 55 e o 11º termo é 89. O valor aproximado do número áureo é 1,6.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 16

a) Observamos na figura ao lado que

$$R_1 = \overline{AB} = 1\,\text{cm}.$$
$$R_2 = \overline{CB} = 2R_1 = 2\,\text{cm}.$$
$$R_3 = \overline{AD} = R_1 + R_2 = 3\,\text{cm}.$$
$$R_4 = \overline{EB} = 2R_2 = 4\,\text{cm}.$$



A área da região destacada é a soma das áreas de dois semicírculos, um com raio R_3 e outro com raio R_4. Logo,

$$A = \frac{\pi R_3^2}{2} + \frac{\pi R_4^2}{2} = \frac{\pi}{2}(3^2 + 4^2) = \frac{25\pi}{2}\,\text{cm}^2.$$

Resposta: A área da região destacada é igual a $25\pi/2$ cm^2.

b) O i-ésimo arco de circunferência mede metade do comprimento da circunferência de raio R_i, ou seja, $c_i = \pi R_i = \pi i$. O comprimento da curva formada pelos primeiros n arcos é a soma dos termos de uma progressão aritmética de termo geral c_i. Logo,

$$c = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \pi i = \pi \sum_{i=1}^{n} i = \frac{\pi n(n+1)}{2}.$$

Supondo que n = 20, temos $c = \pi \cdot 20 \cdot 21/2 = 210\pi$ cm.

Resposta: A curva tem 210π cm de comprimento.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 17

a) Se 1 quilate corresponde a 200 mg, então 0,7 quilate corresponde a $0{,}7 \cdot 200 = 140$ mg $= 0{,}14$ g.
Como cada cm^3 de diamante tem 3,5 g, podemos escrever

$$\frac{3{,}5\,g}{1cm^3} = \frac{0{,}14\,g}{x},$$

donde $3{,}5x = 0{,}14$, ou $x = 0{,}14/3{,}5 = 0{,}04$ cm^3.

Resposta: Um brilhante de 0,7 quilate tem 0,04 cm³, ou 40 mm³.

b) A parte superior do brilhante é um tronco de cone com R = 2 mm, r = 1 mm e h = 0,6 mm. Logo, seu volume é

$$V_T == \frac{\pi}{3}h(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi}{3}0{,}6(2^2 + 2\cdot 1 + 1^2) = 1{,}4\pi mm^3.$$

Por sua vez, a parte inferior do brilhante é um cone com 1,8 mm de altura e raio da base igual a 2 mm. Assim, o volume da parte inferior é dado por

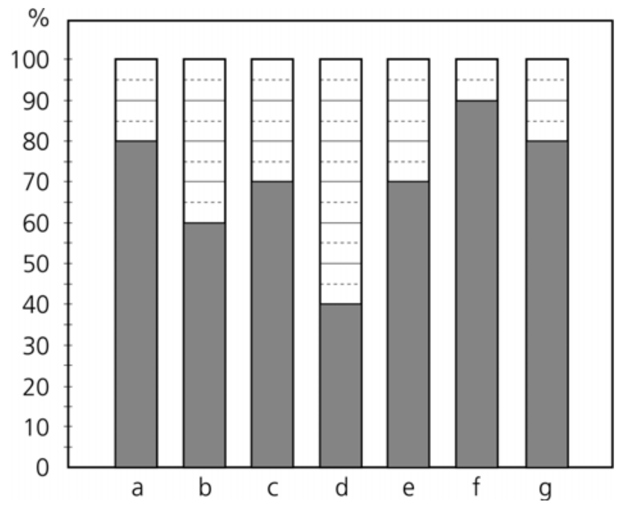
$$V_C = \frac{\pi}{3}hR^2 = \frac{\pi}{3}1{,}8\cdot 2^2 = 2{,}4\pi mm^3.$$

Logo, o volume total é igual a $V_T + V_C = 1{,}4\pi + 2{,}4\pi = 3{,}8\pi$ mm^3.

Resposta: O brilhante tem volume aproximado de 3,8π mm³.

Questão 18

a) Como o tempo de exposição é o mesmo para todos os algarismos e o trecho **a** aparece em 8 dos 10 algarismos, concluímos que ele fica aceso em 8/10 = 80% do tempo. Repetindo esse raciocínio para os demais trechos, obtemos o gráfico de barras ao lado.



Resposta: O gráfico ao lado mostra a porcentagem de tempo em que cada trecho fica aceso.

b) A probabilidade de apresentar defeito é a mesma para todos os trechos. Supondo que a ocorrência de defeito em um trecho seja independente da

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

existência de outro trecho defeituoso, o número de maneiras diferentes de distribuir dois trechos defeituosos pelos sete trechos de um dígito é dado por

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21.$$

Para que o algarismo 3 seja representado corretamente, é preciso que os trechos defeituosos sejam aqueles indicados pelas letras b e d. Assim, em apenas uma das 21 combinações, o algarismo 3 será mostrado corretamente. Logo, a probabilidade é igual a 1/21.

Resposta: A probabilidade de que o algarismo 3 seja representado corretamente é igual a 1/21.

Questão 19

a) O sistema linear deve ter duas equações, uma associada ao número e a outra ao peso das cebolas selecionadas pela consumidora. Assim, temos

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 40 \\ 25x & + & 200y & = & 1700 \end{array}$$

Isolando x na primeira equação, obtemos x = 40 – y. Substituindo esse valor na segunda equação, concluímos que 25(40 – y) + 200y = 1700, ou 175y = 700, ou ainda y = 700/175 = 4. Logo, x = 40 – y = 36.

Resposta: Resolvendo o sistema acima, concluímos que a consumidora selecionou 36 cebolas pequenas e 4 cebolas grandes.

b) A casca de uma cebola pequena tem área igual a $4\pi r^2 = 4\pi 2^2 = 16\pi\,\text{cm}^2$. Como 600 g de cebolas pequenas correspondem a 600/25 = 24 cebolas, a área total de casca equivale a $24\cdot 16\pi = 384\pi\,\text{cm}^2$.

Como a área de casca de 600 g de cebolas grandes é igual a $192\pi\,\text{cm}^2$, as cebolas grandes fornecem o menor desperdício com cascas.

Resposta: O desperdício com cascas é menor para as cebolas grandes.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 20

a) $f(x) = \begin{cases} 3x + p, & \text{se } x \geq -p \\ x - p, & \text{se } x < -p \end{cases}$

Logo, para x = 1, temos 3.1 + p = 1 – p, de modo que 2p = –2, ou p = –1.

Resposta: p = –1.

a') Para x = 1, devemos ter $f(x) = 2 \cdot 1 + |1 + p| = 2$. Assim, $|1 + p| = 0$, de modo que p = –1.

Resposta: p = –1.

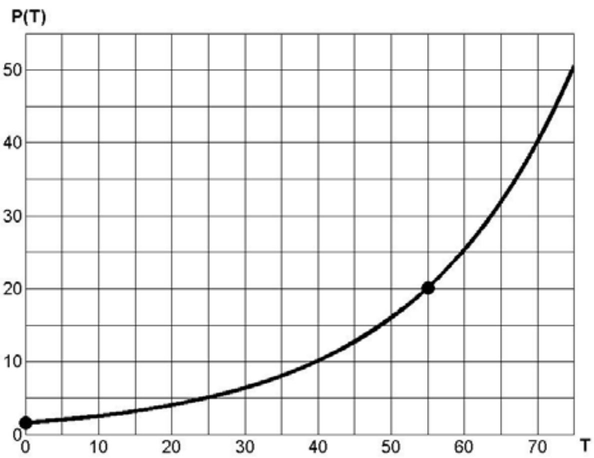
b) Se x < 3, a equação $2x + |x - 3| = 12$ é equivalente a 2x – x + 3 = 12, cuja solução é x = 9. Entretanto, como supomos que x < 3, descartamos essa solução.
Se x ≥ 3, a equação $2x + |x - 3| = 12$ é equivalente a 2x + x – 3 = 12, donde 3x = 15, ou x = 5.

Resposta: x = 5.

Questão 21

a) A função P(T) é exponencial e tem coeficientes **a** e **b** positivos. A curva desejada passa pelos pontos (0, 1,6) e (55, 20), como mostra o gráfico ao lado.

Resposta: Um esboço da curva é apresentado no gráfico ao lado.



b) Sabemos que P(0) = 1,6. Assim, $a \cdot 10^{b0} = 1{,}6$, de modo que a = 1,6.
Da mesma forma, $P(55) = 1{,}6 \cdot 10^{b55}$, donde

$$1{,}6 \cdot 10^{55b} = 20,$$

$$10^{55b} = \frac{20}{1{,}6} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2},$$

$$\log(10^{55b}) = \log\left(\frac{25}{2}\right).$$

Logo, $55b = 2\log(5) - \log(2)$, de modo que $55b = 2 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 = 1{,}1$. Assim, temos b = 1,1/55 = 1/50.

Resposta: As constantes são a = 1,6 e b = 1/50.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 22

a) Usando a regra de Sarrus para o determinante de uma matriz de ordem 3, obtemos

$$\det(A) = 16x^3 - 36x - 64x = 16x^3 - 100x = 4x(4x^2 - 25).$$

Esse determinante é positivo se $x > 0$ e $4x^2 - 25 > 0$, ou se $x < 0$ e $4x^2 - 25 < 0$.
Observamos que $4x^2 - 25 = 0$ se $x^2 = 25/4$, ou seja, se $x = 5/2$ ou $x = -5/2$. A tabela abaixo fornece o sinal de x, de $4x^2 - 25$ e do determinante de A.

		$-5/2$		0		$5/2$	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$4x^2 - 25$	$+$		$-$		$-$		$+$
$4x(4x^2 - 25)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Observamos, então, que o determinante será positivo para $-5/2 < x < 0$ e para $x > 5/2$.

Resposta: O determinante é positivo para $-5/2 < x < 0$ e para $x > 5/2$.

b) Se $x = -2$, então

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix}.$$

Logo,

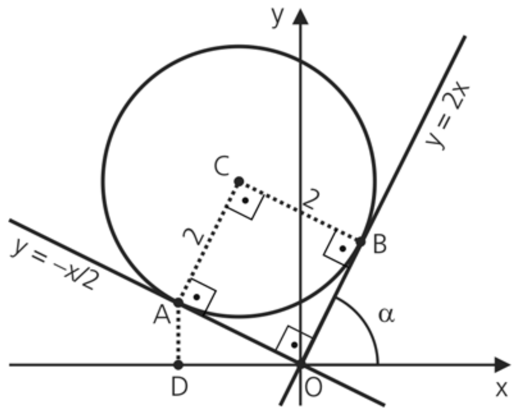
$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 3 + 2\cdot 4 + 0\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + (-2)\cdot 4 + 6\cdot(-1) \\ 0\cdot 3 + 6\cdot 4 + (-32)\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Resposta: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}$**.**

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 23

a) Como mostra a figura ao lado, o quadrilátero OACB é um quadrado de lado igual a 2. Assim, a distância entre o ponto A e a origem é igual a 2.
O coeficiente angular da reta que passa por O e A é –1/2, donde AD/OD = 1/2, ou OD = 2AD. Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OAD, obtemos $OD^2 + AD^2 = 2^2$.
Logo, $(2AD)^2 + AD^2 = 4$, ou seja, $5AD^2 = 4$, ou ainda $AD = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$. Assim, $OD = 4/\sqrt{5} = 4\sqrt{5}/5$. Finalmente, como o ponto A está no segundo quadrante, suas coordenadas são $(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$.



Resposta: O ponto de tangência é $(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$**.**

a') O ponto A tem coordenadas $(x_A, -x_A/2)$. Além disso, como mostra a figura acima, o quadrilátero OACB é um quadrado de lado igual a 2, de modo que a distância entre o ponto A e a origem é igual a 2, ou seja,

$$\sqrt{(x_A - 0)^2 + (-x_A/2 - 0)^2} = 2 .$$

Logo, $x_A^2 + x_A^2/4 = 4$, donde $5x_A^2/4 = 4$, ou seja, $x_A^2 = 16/5$. Como o ponto A está no segundo quadrante, temos $x_A = -4/\sqrt{5} = -4\sqrt{5}/5$. Assim, $y_A = -x_A/2 = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$.

Resposta: O ponto de tangência é $(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$ **.**

b) Como a reta passa pela origem, seu coeficiente linear é 0. Por outro lado, como a reta é a bissetriz do ângulo AÔB, seu coeficiente angular é dado por $tg(\alpha + 45°) = [tg(\alpha) + tg(45°)]/[1 - tg(\alpha)tg(45°)]$. Logo, $tg(\alpha + 45°) = (2+1)/(1 - 2.1) = -3$, e a reta desejada é y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

b') A reta que passa pelos pontos A e C tem coeficiente angular 2, de modo que $(y_C - y_A)/(x_C - x_A) = 2$, ou $(y_C - y_A) = 2(x_C - x_A)$. Como a distância entre A e C é igual a 2, concluímos que $(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 4$. Logo, $5(x_C - x_A)^2 = 4$, ou $x_C - x_A = 2\sqrt{5}/5$. Assim, $y_C - y_A = 4\sqrt{5}/5$, e $C = (-4\sqrt{5}/5 + 2\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5)$, ou $C = (-2\sqrt{5}/5, 6\sqrt{5}/5)$.
Como a reta desejada passa pela origem, seu coeficiente linear é 0. Por outro lado, a reta passa pelo ponto C, de modo que seu coeficiente angular é dado por $(y_C - 0)/(x_C - 0) = 6\sqrt{5}/5/(-2\sqrt{5}/5) = -3$. Logo, a reta tem equação y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b'') O ponto C é equidistante às retas y = 2x e y = –x/2. Reescrevendo essas retas, dizemos que C é equidistante a –2x + y = 0 e a x + 2y = 0. Usando, então, a fórmula da distância entre ponto e reta, temos

$$\frac{|-2x_C + y_C|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{|x_C + 2y_C|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2\,.$$

Logo, $|-2x_C + y_C| = 2\sqrt{5}$ e $|x_C + 2y_C| = 2\sqrt{5}$. Como $x_C < 0$ e $|y_C| > x_C$, temos o sistema linear

$$\begin{cases} -2x_C + y_C = 2\sqrt{5} \\ x_C + 2y_C = 2\sqrt{5} \end{cases},$$

cuja solução é $x_C = -2\sqrt{5}/5$, $y_C = 6\sqrt{5}/5$.

Como a reta desejada passa pela origem, seu coeficiente linear é 0. Por outro lado, a reta passa pelo ponto C, de modo que seu coeficiente angular é dado por $(y_C - 0)/(x_C - 0) = 6\sqrt{5}/5/(-2\sqrt{5}/5) = -3$. Logo, a reta tem equação y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

b''') A reta desejada é a reta suporte da bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Dessa forma, os pontos dessa reta são equidistantes às retas y = 2x e y = –x/2, ou seja, são equidistantes a –2x + y = 0 e x + 2y = 0. Assim, tomando um ponto (x, y) qualquer dessa reta, temos

$$\frac{|-2x + y|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\,.$$

Logo, $|-2x + y| = |x + 2y|$. As soluções dessa equação são soluções de $-2x + y = x + 2y$ ou de $-2x + y = -x - 2y$. Isolando y na primeira equação, obtemos y = –3x. Já a segunda equação fornece y = x/3. Como a reta desejada passa pelo segundo e pelo quarto quadrantes, sua equação é y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

Questão 24

a) Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 180 – 30 – 30 = 120º. Aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC, obtemos

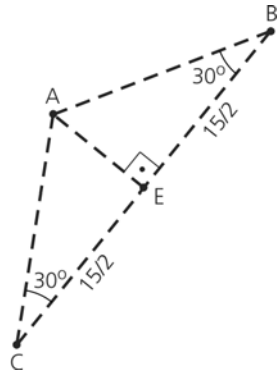
$$\frac{CB}{\text{sen}(B\hat{A}C)} = \frac{AB}{\text{sen}(A\hat{C}B)} \quad \text{ou} \quad \frac{15}{\sqrt{3}/2} = \frac{AB}{1/2}.$$

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Logo, $AB = \dfrac{15 \cdot 1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ m.

Resposta: A distância entre A e B é igual a $5\sqrt{3}$ m.

a') O triângulo ABC é isósceles, de modo que AB = AC. Tomando E como o ponto médio do segmento BC, observamos que o triângulo ABE é retângulo. Desse modo,



$$\cos(A\hat{B}E) = \frac{(15/2)}{AB}, \text{ ou } \cos(30°) = \frac{(15/2)}{AB}, \text{ ou ainda } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(15/2)}{AB}.$$

Logo, $AB = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ m.

Resposta: A distância entre A e B é igual a $5\sqrt{3}$ m.

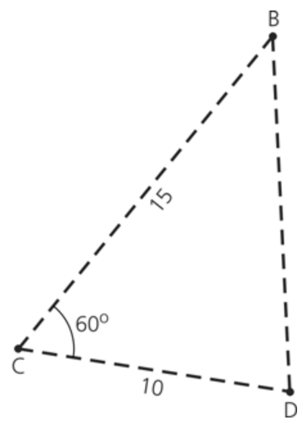
a'') Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 180 – 30 – 30 = 120º. Além disso, o triângulo ABC é isósceles, de modo que AB = AC. Aplicando, então, a lei dois cossenos ao triângulo ABC, obtemos

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(C\hat{A}B),$$
$$15^2 = 2AB^2 - 2 \cdot AB^2 \cdot \cos(120°),$$
$$15^2 = 2AB^2 - 2 \cdot AB^2 \cdot (-1/2).$$

Logo, $3AB^2 = 15^2$, donde $AB = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ m.

Resposta: A distância entre A e B é igual a $5\sqrt{3}$ m.

b) Aplicando, agora, a lei dos cossenos ao triangulo BCD, obtemos



$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos(B\hat{C}D) = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 1/2 = 175.$$

Logo, $BD = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$ m.

Resposta: A distância entre B e D é igual a $5\sqrt{7}$ m.