RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 13

a) Quando se usa o cartucho Preto BR, o custo por página é igual a 90/810 = 1/9. Para o cartucho Preto AR, esse custo baixa para 150/2400 = 1/16. Como 1/16 < 1/9, o cartucho Preto AR é mais econômico.
Você também pode chegar a essa conclusão comparando os valores numéricos. Nesse caso, gasta-se cerca de R$ 0,11 por página usando o cartucho Preto BR, e cerca de R$ 0,06 por página com o cartucho Preto AR. Logo, o cartucho Preto AR é mais econômico.
Quando se usa o cartucho Colorido BR, o custo por página é igual a 120/600 = 1/5 = 8/40. Para o cartucho Colorido AR, esse custo sobe para 270/1200 = 9/40. Logo, o cartucho Colorido BR é mais econômico.
Nesse caso, fazendo-se as contas, chega-se a um custo de R$ 0,20 por página com o cartucho Colorido BR, e cerca de R$ 0,23 por página com o cartucho Colorido AR. Logo, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Resposta: Os cartuchos Preto AR e Colorido BR são os mais econômicos.

a') Quando se usa o cartucho Preto BR, é possível imprimir 810/90 = 9 páginas por R$ 1,00. Com o cartucho Preto AR, imprime-se 2400/150 = 16 páginas com R$ 1,00. Logo, o cartucho Preto AR é mais econômico.
Quando se usa o cartucho Colorido BR, é possível imprimir 600/120 = 5 páginas por R$ 1,00. Com o cartucho Colorido AR, imprime-se 1200/270 = 40/9 ≈ 4,44 páginas com R$ 1,00. Logo, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Resposta: Os cartuchos Preto AR e Colorido BR são os mais econômicos.

a'') Se o cartucho Preto BR imprime 810 páginas a R$ 90,00, então ele imprime 2400 páginas por 90x2400/810 ≈ R$ 266,67. Como esse valor é superior a R$150,00, o cartucho Preto AR é mais econômico.
Se o cartucho Colorido BR imprime 600 páginas por R$ 120,00, então ele imprime 1200 páginas por 120x1200/600 = R$240,00. Como esse valor é menor que R$ 270,00, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Resposta: Os cartuchos Preto AR e Colorido BR são os mais econômicos.

b) A empresa imprime 12000 páginas por mês, das quais 20% são coloridas. Assim, ela imprime 12000x4/5 = 9600 páginas usando apenas o cartucho preto e 2400 páginas coloridas, o que implica o consumo de 9600/2400 = 4 cartuchos do tipo Preto AR, e 2400/1200 = 2 cartuchos do tipo Colorido AR.
A empresa também gasta 12000/500 = 24 resmas de papel por mês. Logo, o custo de impressão, incluindo cartuchos e papel, é igual a 24x10 + 4x150 + 2x270 = 240 + 600 + 540 = R$ 1380,00.

Resposta: A empresa gasta mensalmente R$ 1380,00 com impressão.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 14

a) O carro gasta 378/13,5 = 28 litros de gasolina nessa viagem. Se ele emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de gasolina consumido, então são emitidos 28 x 2,7 = 75,6 kg de CO_2 na viagem.

Resposta: O carro emite 75,6 kg de CO_2 na viagem.

b) A função desejada tem a forma $c(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2$. Com base nos dados da tabela, temos

$$\begin{array}{rcllcr} c(20) & = & a_0 & +20a_1 & +400a_2 & = & 400 \\ c(30) & = & a_0 & +30a_1 & +900a_2 & = & 250 \\ c(40) & = & a_0 & +40a_1 & +1600a_2 & = & 200 \end{array}$$

Subtraindo a primeira linha desse sistema linear das demais, obtemos

$$\begin{array}{rrrcr} a_0 & +20a_1 & +400a_2 & = & 400 \\ & 10a_1 & +500a_2 & = & -150 \\ & 20a_1 & +1200a_2 & = & -200 \end{array}$$

Agora, somando à terceira linha a segunda linha multiplicada por –2, encontramos

$$\begin{array}{rrrcr} a_0 & +20a_1 & +400a_2 & = & 400 \\ & 10a_1 & +500a_2 & = & -150 \\ & & +200a_2 & = & 100 \end{array}$$

Da terceira equação, concluímos que a_2 = 100/200 = 1/2. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos a_1 = [–150 – 500x(1/2)]/10 = –40. Finalmente, da primeira equação, concluímos que a_0 = 400 – 20x(–40) – 400x(1/2) = 1000.

Resposta: A função é $c(v) = 1000 - 40v + v^2/2$.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 15

a) Se CT = 198 e TG = 130, então 198 = LDL + HDL +130/5, de modo que HDL = 172 – LDL. Como Pedro tem indicadores normais, seu HDL satisfaz as inequações 40 ≤ HDL ≤ 60. Assim, temos 40 ≤ 172 – LDL ≤ 60, ou seja, –132 ≤ –LDL ≤ –112, ou ainda, 112 ≤ LDL ≤ 132.
Entretanto, como o valor do LDL não deve ultrapassar 130, concluímos que 112 mg/dl ≤ LDL ≤ 130 mg/dl.

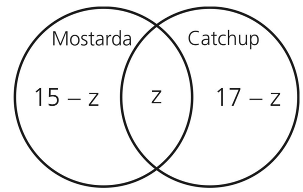
Resposta: O nível de LDL de Pedro, em mg/dl, pertence ao intervalo [112, 130].

b) O número de maneiras de relacionar as amostras às pessoas é igual a P_5 = 5! = 120. Se 3 pessoas possuem sangue O+, então há P_3 = 3! = 6 maneiras de relacioná-las às amostras desse tipo sanguíneo. Além disso, há P_2 = 2! = 2 maneiras de relacionar as pessoas com sangue A+ às amostras correspondentes. Logo, existem $P_3.P_2$ = 6.2 = 12 modos de relacionar as pessoas às amostras de sangue.

Resposta: Sem informações adicionais, há 120 modos de relacionar as pessoas às amostras de sangue. Conhecendo o tipo sanguíneo, o número de maneiras diferentes cai para 12.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 16



a) Denominemos z o número de pessoas que ganharão os dois sachês. Nesse caso, o número de pessoas que receberão apenas mostarda será igual a 15 – z. Por outro lado, 17 – z pessoas receberão apenas catchup. Portanto, (15 – z) + (17 – z) = 14 pessoas receberão apenas um sachê. Assim, 2z = 15 + 17 – 14 = 18, de modo que z = 9. Logo, o grupo é formado por 14 + z = 23 pessoas.

Resposta: O grupo é formado por 23 pessoas.

a') O total de sachês a serem distribuídos é igual a 15 + 17 = 32. Subtraindo os 14 sachês destinados às pessoas que receberão apenas um molho, sobram 32 – 14 = 18 sachês. Como serão entregues dois desses sachês por pessoa, 18/2 = 9 pessoas ganharão os dois molhos. Desse modo, o grupo é formado por 14 + 9 = 23 pessoas.

Resposta: O grupo é formado por 23 pessoas.

a'') Denominemos x o número de pessoas que receberão só o sachê de mostarda, y o número de pessoas que receberão apenas catchup e z o número de pessoas que ganharão os dois sachês. A partir dos dados do enunciado, concluímos que

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 14 \\ x & & +z & = & 15 \\ & y & +z & = & 17 \end{array}$$

Somando as três equações acima, obtemos 2x + 2y + 2z = 46, de modo que o grupo é formado por x + y + z = 23 pessoas. Observe que também é possível obter x, y e z resolvendo diretamente o sistema.

Resposta: O grupo é formado por 23 pessoas.

b) Se apenas 19 pessoas quiseram molho, então 19 – 17 = 2 delas receberão apenas mostarda, 19 – 15 = 4 receberão apenas catchup e 19 – 2 – 4 = 13 receberão os dois molhos.
Assim, a probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

Resposta: A probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

b') Seja z o número de pessoas que receberão dois sachês. Se apenas 19 pessoas quiseram molho, então 19 = (15 – z) + z + (17 – z) = 15 + 17 – z, donde z = 13.
Assim, a probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

Resposta: A probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 17

a) O termo geral da PA que representa a despesa tem a forma $a_n = 800000 - 45000(n - 1)$.
A despesa será menor que a receita quando $a_n < 600000$, ou seja, quando $845000 - 45000n < 600000$. Essa desigualdade é equivalente a $45000n > 45000$, que implica em $n > 49/9 \approx 5,44$.

Resposta: A despesa será menor que a receita no sexto mês, ou seja, daqui a cinco meses.

b) O termo geral da PG que representa a receita é $a_n = 600000 \times (11/10)^{n-1} = 600000 \times 1,1^{n-1}$.
A receita acumulada em 10 meses é igual à soma dos termos da PG, que é dada pela fórmula

$$S_{10} = 600000 \frac{(1,1^{10} - 1)}{(1,1 - 1)}.$$

Podemos escrever $1,1^{10} = 1,1^5 \cdot 1,1^5 \approx 1,61^2 \approx 2,59$. Assim, temos $S_{10} \approx 600000 \times 1,59 / 0,1 = 9540000$ reais.
Observação: outros valores podem ser obtidos usando-se aproximações diferentes para $1,61^2$. Adotamos o valor 2,59 em virtude de 1,61 ser a aproximação com duas casas decimais de $1,1^{10}$.

Resposta: A receita acumulada em 10 meses atingirá cerca de R$ 9 540 000.

Questão 18

a) Reformulando a equação $f(x) = x$, obtemos

$$\frac{1}{(x + 1/2)} = x - 1.$$

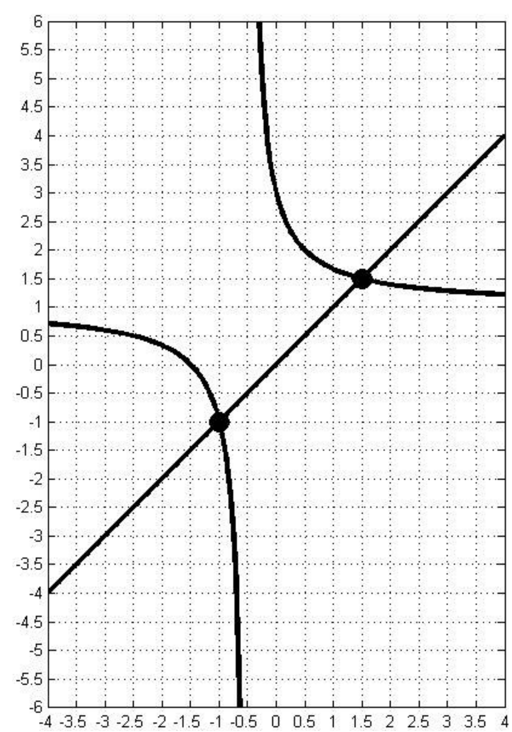
Supondo que $x \neq -1/2$, isso equivale a $(x + 1/2)(x - 1) = 1$, ou simplesmente $x^2 - x/2 - 3/2 = 0$.
Usando a fórmula de Báskara, temos

$$x = \left(1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 - 12/2}\right)/2 = [(1/2) \pm (5/2)]/2.$$

Logo, as raízes são $x_1 = 3/2$ e $x_2 = -1$, que são os pontos fixos de $f(x)$.

Resposta: Os pontos fixos são $x_1 = 3/2$ e $x_2 = -1$.

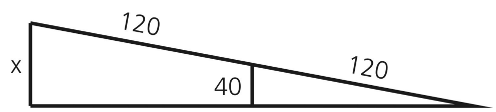
b) Os gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$ são dados ao lado. Os pontos marcados sobre o eixo x são aqueles calculados no item (a).



RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 19

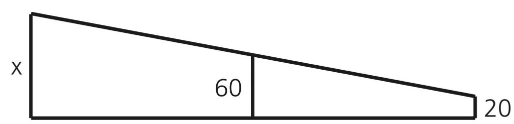
a) O centro da tábua está sempre a 60 cm do chão. Se o extremo direito dessa tábua está a 20 cm do chão, então a diferença de altura entre o extremo direito e o centro da tábua é igual a 40 cm, como mostra a figura abaixo.



Considerando que uma metade da tábua tem 120 cm de comprimento e usando semelhança de triângulos, constatamos que a diferença de altura entre as extremidades da tábua, que denominamos x, pode ser obtida a partir da equação $x/40 = 240/120$. Daí, $x = 80$ cm, de modo que a extremidade esquerda da tábua está a $80 + 20 = 100$ cm do chão.

Resposta: A extremidade esquerda da gangorra está a 1 m do chão.

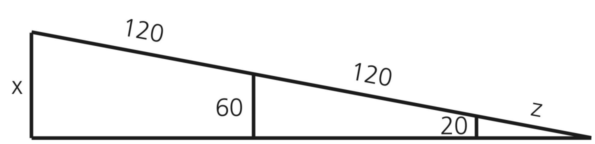
a') O centro da tábua está sempre a 60 cm do chão. Essa distância corresponde à base média do trapézio cujos vértices são as extremidades da tábua e suas projeções verticais sobre o solo, como mostra a figura abaixo.



Se o extremo direito da tábua está a 20 cm do chão, então $(x + 20)/2 = 60$. Desse modo, $x + 20 = 120$, ou simplesmente $x = 100$ cm.

Resposta: A extremidade esquerda da gangorra está a 1 m do chão.

a'') A figura abaixo mostra o triângulo obtido prolongando o segmento de reta que representa a tábua, até que esse encontre a linha horizontal que representa o chão.

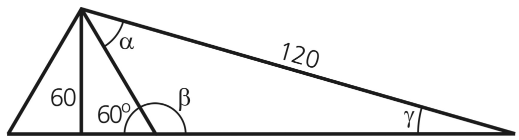


Usando semelhança de triângulos, obtemos $60/20 = (120 + z)/z$. Logo, $3z = 120 + z$, ou seja, $z = 120/2 = 60$ cm. Recorrendo, novamente, à propriedade da semelhança de triângulos, concluímos que $x/20 = (120 + 120 + z)/z$. Assim, $x/20 = 300/60$, de modo que $x = 100$ cm

Resposta: A extremidade esquerda da gangorra está a 1 m do chão.

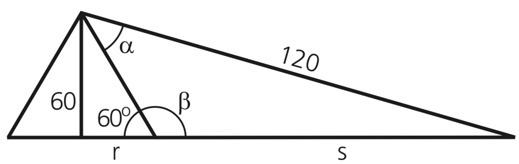
b) O triângulo formado pela metade direita da tábua, pela lateral da base e pelo chão tem ângulos internos α, β e γ, como mostra a figura abaixo, que representa o lado direito da gangorra. Da figura, concluímos que $\beta = 180° - 60° = 120°$. Além disso, $\text{sen}(\gamma) = 60/120 = 1/2$. Logo, $\gamma = 30°$, de modo que $\alpha = 180° - 120° - 30° = 30°$.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA



Resposta: O ângulo α mede 30º.

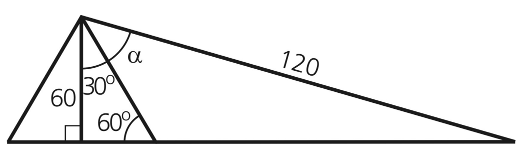
b') O triângulo da base da gangorra é isósceles e tem altura 60 cm, como mostra a figura abaixo, na qual se vê a metade direita da gangorra.



Para determinar a metade do comprimento da aresta da base da gangorra, usamos o teorema de Pitágoras, que diz que $(2r)^2 = 60^2 + r^2$, ou seja, $r = \sqrt{60^2/3} = 60/\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ cm. Além disso, o triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 120 cm (metade do comprimento da tábua) tem catetos de comprimento 60 cm e (s + r). Usando novamente o teorema de Pitágoras, obtemos $120^2 = 60^2 + (r + s)^2$, de modo que $r + s = \sqrt{120^2 - 60^2} = \sqrt{14400 - 3600} = \sqrt{10800} = 60\sqrt{3}$ cm. Assim, $s = 60\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ cm.
Usando, agora, a lei dos senos e observando que $\beta = 180º - 60º = 120º$, temos $\text{sen}(\alpha)/40\sqrt{3} = \text{sen}(\beta)/120 = \text{sen}(120º)/120 = \sqrt{3}/240$. Logo, $\text{sen}(\alpha) = 40(\sqrt{3})^2/240 = 120/240 = 1/2$, de modo que $\alpha = 30º$.

Resposta: O ângulo α mede 30º.

b'') O triângulo da base da gangorra é isósceles e tem altura 60 cm, como mostra a figura abaixo, na qual se vê a metade direita da gangorra.



A partir do triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 120 cm e que tem um cateto com 60 cm de comprimento, concluímos que $\cos(30º + \alpha) = 60/120 = 1/2$. Logo, $30º + \alpha = 60º$, de modo que $\alpha = 30º$.

Resposta: O ângulo α mede 30º.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 20

a) Quando w = 0, a área é igual a 20×10 = 200 cm^2. A cada aumento de 1 cm em w, há uma redução de 5 cm^2 na área. Assim, temos A(w) = 200 – 5w.
Quando A(w) = 150, temos 200 – 5w = 150, ou seja, w = 50/5 = 10 cm. Nesse caso,

$$x_{CG}(w) = \frac{400 - 15.10}{80 - 2.10} = \frac{250}{60} = \frac{25}{6} \quad \text{e} \quad y_{CG}(w) = \frac{400 + (10-20)^2}{80 - 2.10} = \frac{500}{60} = \frac{25}{3}.$$

Resposta: As coordenadas são x_{CG} = 25/6 cm e y_{CG} = 25/3 cm.

b) Observamos que $(80 - 2w) \cdot x_{CG} = 400 - 15w$. Logo, (15 – 2$x_{CG}$)w = 400 – 80$x_{CG}$, ou seja, w($x_{CG}$) = (400 – 80$x_{CG}$)/(15 – 2$x_{CG}$).
Se x_{CG} = 7/2, então w(7/2) = (400 – 80.7/2)/(15 – 2.7/2) = (400 – 280)/(15 – 7) = 120/8 = 15.
Assim, y_{CG}(15) = [400 + $(15 – 20)^2$]/[80 – 2.15] = 425/50 = 17/2 = 8,5 cm.

Resposta: A expressão geral da função é w(x_{CG}) = (400 – 80x_{CG})/(15 – 2x_{CG}). Quando a coordenada x_{CG} é igual a 7/2 cm, a coordenada y_{CG} mede 17/2 cm (ou 8,5 cm).

Questão 21

a) Queremos determinar o instante T tal que P(T) = 75. Nesse caso, temos $75 = 100(1 - 2^{-0,1T})$, de modo que $0,75 = 1 - 2^{-0,1T}$, ou $2^{-0,1T} = 0,25 = 1/4 = 2^{-2}$. Logo, –0,1T = –2, ou seja, T = 20 anos.

Resposta: Em 20 anos, 75% dos processadores apresentarão falhas.

b) Para T = 10, temos Q(10) = P(10)/4 = $100(1 - 2^{-1})/4$ = 100/8. Assim, $100(1 - 2^{10c}) = 100/8$, de modo que $2^{10c} = 7/8$. Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados da equação, obtemos 10c = $\log_2(7)$ – 3. Logo, c = (2,81 – 3)/10 = –0,019.

Resposta: A constante c vale –0,019.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

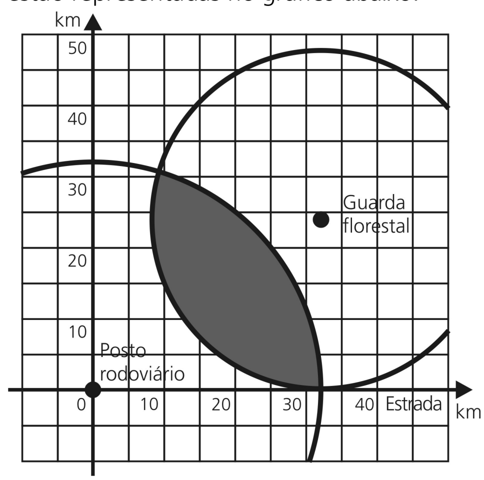
Questão 22

a) O ponto da estrada mais próximo da guarda florestal está no quilômetro $\sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{1024} = 32$.

A fórmula geral de um círculo centrado em (x_0, y_0) e com raio r é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2$. Como a primeira antena está centrada na estação da guarda florestal e seu sinal atinge (mas não ultrapassa) o ponto da estrada calculado acima, temos $(x_0, y_0) = (32,24)$ e r = 24. Assim, a área de cobertura da primeira antena é dada por $(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \le 24^2$.

Como a segunda antena está instalada no posto rodoviário e seu sinal também alcança, sem ultrapassar, o ponto (32, 0), temos $(x_0, y_0) = (0,0)$ e r = 32. Logo, a área de cobertura dessa antena é dada por $x^2 + y^2 \le 32^2$.

As regiões cobertas pelas antenas estão representadas no gráfico abaixo.



Resposta: As regiões de cobertura das antenas são dadas por $(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \le 24^2$ e $x^2 + y^2 \le 32^2$. Essas regiões estão representadas na figura acima. A região mais escura é aquela coberta simultaneamente pelas duas antenas.

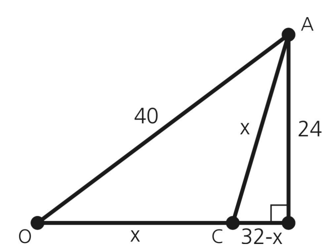
b) Queremos encontrar um ponto na forma (x,0) tal que sua distância em relação aos pontos (0,0) e (32,24) seja a mesma. Assim, $(x - 0)^2 + (0 - 0)^2 = (x - 32)^2 + (0 - 24)^2$.

Reescrevendo essa equação, obtemos $x^2 = x^2 - 64x + 1024 + 576$, de modo que x = 1600/64 = 25.

Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

b') Na figura ao lado, que ilustra o problema, os pontos O, A e C representam, respectivamente, o posto rodoviário, a estação da guarda florestal e o ponto de instalação da nova antena.

Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $x^2 = (32 - x)^2 + 24^2$, ou seja, $x^2 = x^2 - 64x + 1024 + 576$. Desse modo, x = 1600/64 = 25.

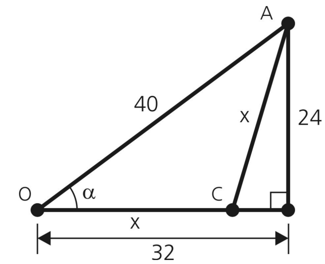


Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

b'') Na figura ao lado, que ilustra o problema, os pontos O, A e C representam, respectivamente, o posto rodoviário, a estação da guarda florestal e o ponto de instalação da nova antena.

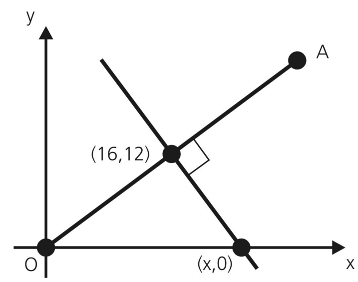
Da figura, concluímos que cos(α) = 32/40 = 4/5. Usando, agora, a lei dos cossenos, obtemos $x^2 = x^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot x \cdot \cos(\alpha)$, de modo que 64x = 1600. Logo, x = 1600/64 = 25.



Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

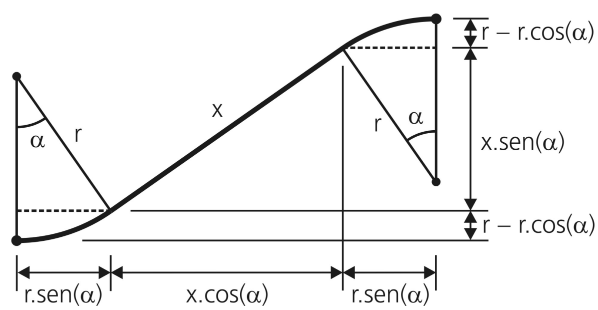
b''') Considere o segmento OA que liga o posto rodoviário à estação da guarda florestal. Esse segmento pertence à reta y = (24/32)x = (3/4)x. O ponto médio do segmento OA é (16,12).

Queremos encontrar um ponto na forma (x,0) que pertença à reta que é perpendicular ao segmento AO e passa pelo ponto (16,12). Essa reta tem coeficiente angular –4/3 e é dada por (y – 12) = –(4/3)(x – 16). Assim, tomando y = 0, obtemos –12.3 = –4(x – 16). Logo, x = (4.16 + 12.3)/4 = 25.



Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

Questão 23



a) Q diagrama acima mostra que y = 2r.sen(α) + x.cos(α). Para r = 36, d = 72 e α = 45º, temos $x = 72\sqrt{2} - 2.36(\sqrt{2} - 1) = 72\,\text{m}$ e $y = 2.36.\sqrt{2}/2 + 72\sqrt{2}/2 = 72\sqrt{2}$ m.

Resposta: $y = 72\sqrt{2}$ m.

b) A partir do diagrama acima, concluímos que d = 2r – 2r.cos(α) + x.sen(α). Supondo que r = 36, d = 90 e α = 60º, temos $90 = 2.36 - 2.36.(1/2) + x.(\sqrt{3}/2)$, donde $x = (90 - 36).2/\sqrt{3} = 108/\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ m.

Resposta: $x = 36\sqrt{3}$ m.

RESPOSTA ESPERADA – MATEMÁTICA

Questão 24

A caixa de um produto longa vida é produzida como mostra a sequência de figuras abaixo. A folha de papel da figura 1 é emendada na vertical, resultando no cilindro da figura 2. Em seguida, a caixa toma o formato desejado, e são feitas novas emendas, uma no topo e outra no fundo da caixa, como mostra a figura 3. Finalmente, as abas da caixa são dobradas, gerando o produto final, exibido na figura 4. Para simplificar, consideramos as emendas como linhas, ou seja, desprezamos a superposição do papel.

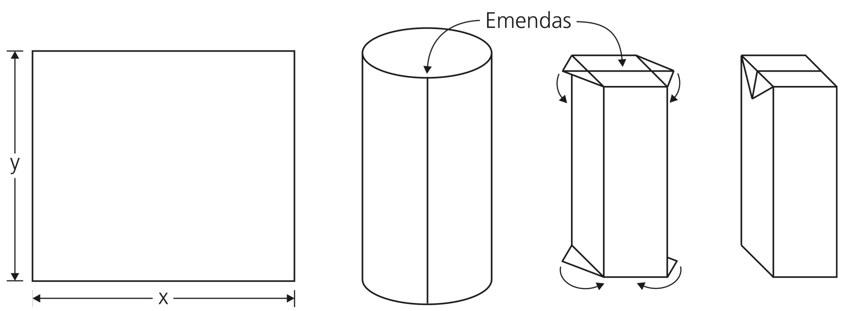


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Se a caixa final tem 20 cm de altura, 7,2 cm de largura e 7 cm de profundidade, determine as dimensões x e y da menor folha que pode ser usada na sua produção.
b) Supondo, agora, que uma caixa tenha seção horizontal quadrada (ou seja, que sua profundidade seja igual a sua largura), escreva a fórmula do volume da caixa final em função das dimensões x e y da folha usada em sua produção.

Respostas esperadas

a) Como desprezamos as emendas, o valor de x corresponde ao perímetro do retângulo da base da caixa. Assim, $x = 2.7{,}2 + 2.7 = 28{,}4$ cm.
Já o valor de y é dado pela soma da altura da caixa com o dobro da metade da menor dimensão de sua base, ou seja, $y = 20 + 2\cdot(7/2) = 27$ cm.

Resposta: A folha de papel deve ter dimensões x = 28,4 cm e y = 27 cm.

b) Como a caixa tem seção quadrada, o lado de sua base mede $x/4$.
Além disso, a altura da caixa mede $y – 2\cdot (x/4)/2 = y – x/4$.
Logo, o volume da caixa é dado por $V = (x/4)^2(y – x/4)$, ou $V = (4x^2y – x^3)/64$.

Resposta: O volume da caixa é dado por $V = (4x^2y – x^3)/64$.