RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 13

a)
A quantidade é dada por (100 - 53)% de 1,5 milhão, ou seja, 0,47 × 1,5 milhão = 705.000.
Portanto, são consumidas 705.000 pizzas.

b)
A quantidade é dada por (35 + 25)% de 53% de 1,5 milhão, ou seja, 0,6 × 0,53 × 1,5 milhão = 477.000. Portanto, são consumidas 477.000 pizzas de mozarela e calabresa.

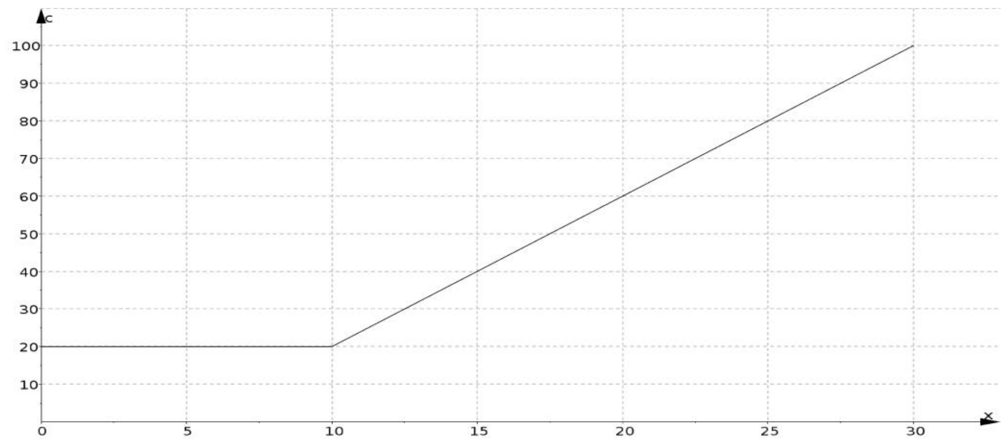
QUESTÃO 14

a)
Sejam H o número de homens e M o número de mulheres na academia. Então, $M + H = 100$ e $(H \times 90 + M \times 65)/100 = 75$. Substituindo $M = 100 - H$ na segunda equação, temos $H \times 90 + (100 - H) \times 65 = 7.500$, resultando em $H = 40$. Logo, 40 homens frequentam a academia.

b)
Seja S o peso médio dos 10 alunos mais pesados. Logo, $(100 \times 75 - 10 \times S)/\,(100 - 10) = 72$. Resolvendo, temos $S = 102$. Portanto, o peso médio desses 10 alunos é 102 kg.

QUESTÃO 15

a)
A função $c(x)$ é dada por $c(x) = 20$ se $0 \leq x \leq 10$ e $c(x) = 20 + 4\,(x - 10) = 4x - 20$ se $x > 10$. O gráfico da função $c(x)$ está exibido na figura abaixo.



b)
Para $x = 4$, o preço unitário é dado por $c(4)/\,4 = 20/\,4 = 5$ reais por metro cúbico. Para $x = 25$, o preço unitário é dado por $c(25)\;/\;25 = \big(20 + 4(25 - 10)\big)/\,25\; = \;80\;\;/\;\;25\;\; = 3{,}20$ reais por metro cúbico.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 16

a)
O número total de possibilidades é igual à combinação de 3 números em 12, ou seja, $12 \times 11 \times 10 / 3! = 12 \times 11 \times 10 / 6 = 220$. Portanto, a probabilidade de acerto é de 1 em 220, ou seja, $1/220 \approx 0{,}0045$.

b)
Uma única aposta em 5 números equivale a um total de apostas igual à combinação de 3 números em 5, ou seja, $5 \times 4 \times 3/3! = 5 \times 4 \times 3/6 = 10$. Portanto, a aposta em 5 números deveria custar $10 \times 2 = 20$ reais.

QUESTÃO 17

a)
Calculando o comprimento das hipotenusas de cada um dos quatro triângulos retângulos, temos, em sentido anti-horário, $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, $\sqrt{1+3} = \sqrt{4}$ e $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Portanto, $x = \sqrt{5}\,cm$.

b)
As medidas dos ângulos agudos de cada triângulo retângulo, que somadas dão a medida do ângulo α, são, em sentido anti-horário, $arctan(1/1) = 45^o$, $arctan\left(1/\sqrt{2}\right) < 45^o$, $arctan\left(1/\sqrt{3}\right) = 30^o$ e $arctan\left(1/\sqrt{4}\right) < 30^o$. Portanto, o ângulo α tem medida inferior a $45^o + 45^o + 30^o + 30^o = 150^o$.

QUESTÃO 18

a)
Conforme as informações dadas, $1 = f(0) = 0^2 + a.0 + b = b$ e o discriminante da quadrática é nulo, ou seja, $a^2 - 4b = 0$. Resolvendo, encontramos $b = 1$ e $a = \pm 2$.

b)
Neste caso, temos $f(x) = x^2 + a\,x + 1 - a$. Para $x = 1$, temos $y = f(1) = 2$, independentemente do valor de a. Portanto, o ponto comum é $(1{,}2)$.

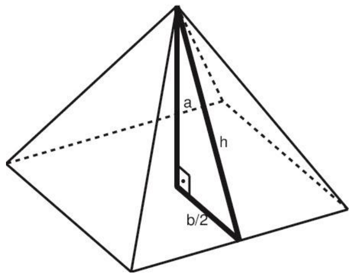
QUESTÃO 19

a)
Pela definição de progressão harmônica, temos que $(5/2, 9/4, 2, \dots)$ é uma PA. A razão dessa PA é $9/4 - 5/2 = -1/4$. Logo, a PA até o sexto termo é dada por $(5/2, 9/4, 2, 7/4, 3/2, 5/4)$. Assim, o sexto termo da respectiva progressão harmônica é $4/5$.

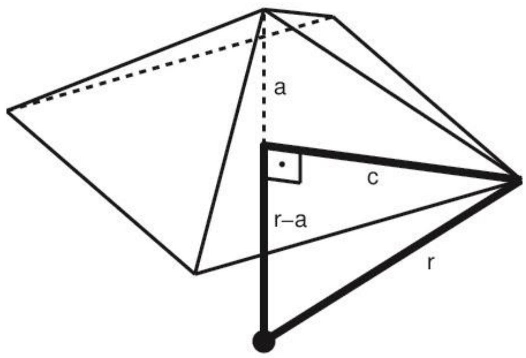
b)
Pela definição de progressão harmônica, temos que $1/a, 1/b$ e $1/c$ são termos consecutivos de uma PA. Assim,
$1/b - 1/a = 1/c - 1/b \Rightarrow 2/b = 1/a + 1/c \Rightarrow 2/b = (a+c)/(ac) \Rightarrow b = 2ac/(a+c)$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 20



a) Seja h a altura do triângulo de uma face triangular. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos a, $b/2 = 3$ e hipotenusa h, encontramos $h^2 = a^2 + 9$. Como a área da face triangular é igual a 15, temos que $15 = bh/2 = 3\sqrt{a^2+9} \Rightarrow 25 = a^2 + 9 \Rightarrow a = 4$. Logo, a altura é igual a 4 m.



b) Seja r o raio da esfera circunscrita à pirâmide. Por simetria, o centro da esfera deve estar na reta que contém a altura da pirâmide. Além disso, como o comprimento do raio não pode ser menor do que 3 m (metade do lado da base), o centro da esfera está fora da pirâmide. Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos $r - a$, $c = b\sqrt{2}/2$ e hipotenusa r. Logo,

$r^2 = (r-a)^2 + c^2 \Rightarrow$

$r^2 = (r-2)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$r^2 = r^2 - 4r + 4 + 18 \Rightarrow$

$0 = -4r + 22 \Rightarrow r = 11/2$.

Portanto, o raio da esfera circunscrita à pirâmide é igual a 5,5 m.

QUESTÃO 21

a)

Claramente, a altura é 0,5 m quando $t = t_1 = 0$. Seja t_2 o instante em que a altura é 1,5 m. Assim, $0{,}5 + \log_3(t_2+1) = 1{,}5 \Rightarrow \log_3(t_2+1) = 1 \Rightarrow t_2 = 2$. Portanto, o tempo necessário é de $t_2 - t_1 = 2$ anos.

b)

Temos que $g(t) - h(t) = h(3t+2) - h(t) = 0{,}5 + \log_3(3t+2+1) - 0{,}5 - \log_3(t+1) = \log_3\big(3(t+1)\big) - \log_3(t+1) = \log_3 3 + \log_3(t+1) - \log_3(t+1) = 1$. Portanto, a diferença $g(t) - h(t)$ é uma constante.

QUESTÃO 22

a)

De $A^T = -A$ temos $\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -b \\ -c & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Portanto, $a = -a, c = -1, -2 = -b, 1 = -c$ e $b = 2$, ou seja, $a = 0$, $b = 2$ e $c = -1$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

b)

O sistema a ser resolvido é $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-z=1 \\ cx-2y=d \end{cases}$. Somando as duas primeiras equações, obtemos $y=2$, e o sistema se reduz a $\begin{cases} x+z=-1 \\ cx=d+4 \end{cases}$. Para que existam infinitas soluções, devemos ter $c=0$ e $d=-4$.

QUESTÃO 23

a)
Usando as relações de Girard, temos $r-r+s=2$, $-r^2+r\,s-r\,s=-9$ e $-r^2s=-18$. Portanto, $s=2$ e $r=\pm 3$.

b)
Temos que $p(z)=p(1+i)=(1+i)^3-2\,(1+i)^2-9\,(1+i)+18=1+3i+3i^2+i^3-2\,(1+2i+i^2)-9(1+i)+18=1+3i-3-i-2(1+2i-1)-9-9i+18=7-11i$.

QUESTÃO 24

a)
Seja $P=(x,y)$ o centro de um círculo que passa pelos pontos A e B. As distâncias de P a A e de P a B devem ser iguais, ou seja, $(x+1)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-2)^2$. Assim, $x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^3-4y+4$, ou seja, $6x+2y=6$. Portanto, o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos A e B é uma reta de equação $3x+y=3$.

b)
Seja $C=(0,c)$. A área do triângulo ABC é dada pela metade do módulo do determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix}$. Logo, $|-2+2c-2+c|/2=8 \Rightarrow |3c-4|=16 \Rightarrow 3c-4=\pm 16 \Rightarrow c=20/3$ ou $c=-4$. Como c deve ser negativo, tomamos $c=-4$.