FUNDAÇÃO
GETULIO VARGAS

EESP
Escola de Economia
de São Paulo

PROCESSO SELETIVO/2009

CADERNO 1
Respostas da 2.ª Fase

Matemática

RESOLUÇÃO

FUNDAÇÃO
vunesp

01. Considere o seguinte arranjo de números:

Linha 1						0					
Linha 2					1		1				
Linha 3				2		2		2			
Linha 4			3		4		4		3		
Linha 5		4		7		8		7		4	
Linha 6	5		11		15		15		11		5

a) Considere a seqüência numérica formada pelos números dispostos na segunda diagonal, que são: 1, 2, 4, 7, 11, ...
O 99.º número dessa seqüência é um elemento da 100.ª linha da tabela. Calcule esse número.

b) Seja f(n) a soma dos números da linha n. Calcule n, sabendo que f(n) = 4094.

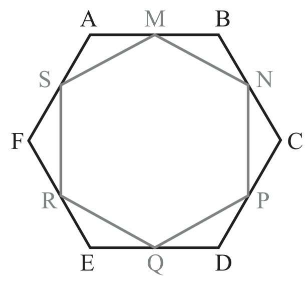
RESPOSTA:

a)
1 + 0 = 1 ➔ 1.º termo
1 + 1 = 2 ➔ 2.º termo
1 + 1 + 2 = 4 ➔ 3.º termo
1 + 1 + 2 + 3 = 7 ➔ 4.º termo
1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11 ➔ 5.º termo
1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16 ➔ 6.º termo
99.º termo: $1 + (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98) = 1 + \frac{(1+98).98}{2} = 4\,852$

b)
$f(1) = 2^1 - 2 = 0$
$f(2) = 2^2 - 2 = 2$
$f(3) = 2^3 - 2 = 6$
$f(4) = 2^4 - 2 = 14$
$\vdots$
$f(n) = 2^n - 2$

$2^n - 2 = 4\,094$
$2^n = 4\,096$
$2^n = 2^{12} \rightarrow n = 12$

02. Os pontos médios dos lados de um hexágono regular ABCDEF são os vértices do hexágono menor MNPQRS, conforme indica a figura.

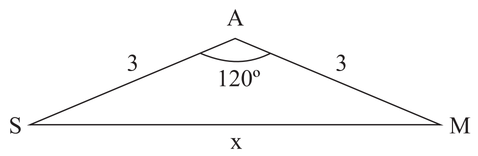


a) Calcule o perímetro do hexágono menor, sabendo-se que o lado do hexágono maior mede 6 cm.

b) Calcule a porcentagem que a área do hexágono menor ocupa da área do hexágono maior.

Resposta:

a)
O hexágono MNPQRS é regular, porque os triângulos SAM, MBN, NCP, PDQ, QER e RFS são isósceles e congruentes.



$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3.\cos 120^\circ$
$x = \sqrt{27}$
$x = 3\sqrt{3}$
Perímetro $= 18\sqrt{3}$ cm

b)

$$A_{\text{hex menor}} = 6.\frac{(3\sqrt{3})^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$$

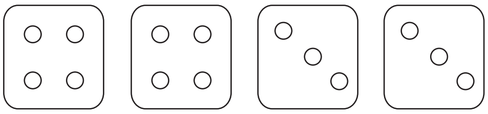
$$A_{\text{hex maior}} = 6.\frac{6^2.\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}\,\text{cm}^2$$

$$\frac{A_{\text{hex menor}}}{A_{\text{hex maior}}} = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{54\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \to 75\%$$

03. Quatro dados convencionais honestos foram lançados.

a) Liste todas as possibilidades distintas para o resultado da soma dos números obtidos no lançamento, sabendo-se que o produto dos números obtidos foi 144.

b) Dentre as possibilidades de o produto dos números ser 144, e independentemente da ordem dos dados, calcule a probabilidade da seguinte ocorrência:



RESPOSTA:

a)
Analisando os divisores de 144 e sua fatoração encontramos os seguintes produtos (e suas permutações):

i) 1.4.6.6 ii) 2.2.6.6 iii) 2.3.4.6 iv) 3.3.4.4

Como as permutações não modificam nem o produto nem a soma, as possíveis somas são:

Caso i: $1 + 4 + 6 + 6 = 17$
Caso ii: $2 + 2 + 6 + 6 = 16$
Caso iii: $2 + 3 + 4 + 6 = 15$
Caso iv: $3 + 3 + 4 + 4 = 14$

Portanto, são quatro somas possíveis.

b)
Retomando os casos dos produtos (i, ii, iii, iv), o total de permutações possíveis será dado por:

total de possibilidades (casos i, ii, iii e iv) $= \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!\,2!} + 4! + \frac{4!}{2!\,2!} = 48$

Os casos favoráveis são todas as permutações de 4, 4, 3 e 3 (permutações do caso iv), ou seja, $\frac{4!}{2!\,2!} = 6$. Portanto, a probabilidade procurada é $\frac{6}{48}$, ou seja, $\frac{1}{8}$.

04. Sejam x, y e z números reais positivos que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 4 \\ y + \dfrac{1}{z} = 1 \\ z + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

a) Calcule a solução (x, y, z) desse sistema.

b) Faça um esboço do gráfico de $x + \dfrac{1}{y} = 4$ no plano ortogonal (x,y).

RESPOSTA:

a)

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 4 \rightarrow x = 4 - \dfrac{1}{y} \rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{y}{4y-1} \quad (1) \\ y + \dfrac{1}{z} = 1 \rightarrow \dfrac{1}{z} = 1 - y \rightarrow z = \dfrac{1}{1-y} \quad (2) \\ z + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{3} \quad (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), teremos:

$$\frac{1}{1-y} + \frac{y}{4y-1} = \frac{7}{3}$$

$25y^2 - 20y + 4 = 0$, com $y > 0$, $y \neq 1$ e $y \neq \dfrac{1}{4}$

$$y = \frac{2}{5}$$

Substituindo $y = \dfrac{2}{5}$ em (1) e (2):

$$z = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$x = 4 - \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2} \qquad S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3} \right) \right\}$$

b)

$$y = \frac{1}{4 - x}$$