FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

EESP

Escola de Economia de São Paulo

PROCESSO SELETIVO

1.º SEMESTRE DE 2011

3. Caderno 1

Prova da 2.ª Fase

Matemática

RESOLUÇÃO

FUNDAÇÃO vunesp

19.12.2010

8h

MATEMÁTICA

01. Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma sequência com as seguintes propriedades:

(i) $a_1 = 1$.

(ii) $a_{2n} = n \cdot a_n$, para qualquer n inteiro positivo.

(iii) $a_{2n+1} = 2$, para qualquer n inteiro positivo.

a) Indique os 16 primeiros termos dessa sequência.

b) Calcule o valor de $a_{2^{50}}$.

RESPOSTA:

a) $a_1 = 1$

$a_2 = a_{2\cdot 1} = 1\cdot a_1 = 2^0\cdot 2^0 = 2^0 = 1$

$a_3 = 2$

$a_4 = a_{2\cdot 2} = 2\cdot a_2 = 2^1\cdot 2^0 = 2^1 = 2$

$a_5 = 2$

$a_6 = a_{2\cdot 3} = 3\cdot a_3 = 3\cdot 2 = 6$

$a_7 = 2$

$a_8 = a_{2\cdot 4} = 4\cdot a_4 = 2^2\cdot 2^1 = 2^{1+2} = 8$

$a_9 = 2$

$a_{10} = a_{2\cdot 5} = 5\cdot a_5 = 5\cdot 2 = 10$

$a_{11} = 2$

$a_{12} = a_{2\cdot 6} = 6\cdot a_6 = 6\cdot 6 = 36$

$a_{13} = 2$

$a_{14} = a_{2\cdot 7} = 7\cdot a_7 = 7\cdot 2 = 14$

$a_{15} = 2$

$a_{16} = a_{2\cdot 8} = 8\cdot a_8 = 2^3\cdot 2^{1+2} = 2^{1+2+3} = 64$

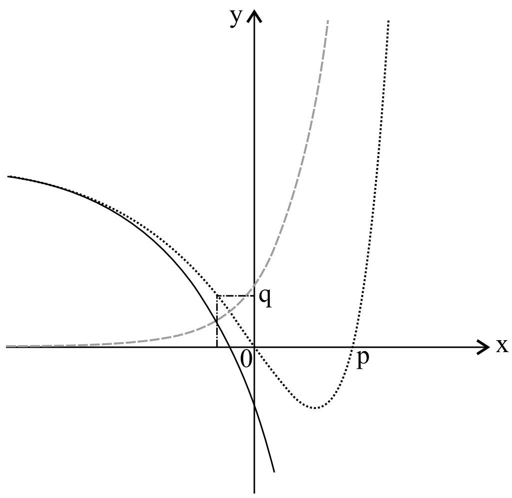
Portanto, a sequência procurada é: (1, 1, 2, 2, 2, 6, 2, 8, 2, 10, 2, 36, 2, 14, 2, 64).

b) Da sequência listada no item anterior, percebe-se que $a_{2^n} = 2^{1+2+\ldots+(n-1)}$.

Segue que $a_{2^{50}} = 2^{1+2+3+\ldots+49}$. Como 1 + 2 + 3 + ... + 49 é a soma de 49 termos de uma progressão aritmética, temos que

$$a_{2^{50}} = 2^{\frac{(1+49)\cdot 49}{2}} = 2^{25\cdot 49} = 2^{1225}.$$

02. A figura indica os gráficos das funções f, g, h, todas de IR em IR, e algumas informações sobre elas.



(i) $f(x) = 3 - 2^{x+2}$

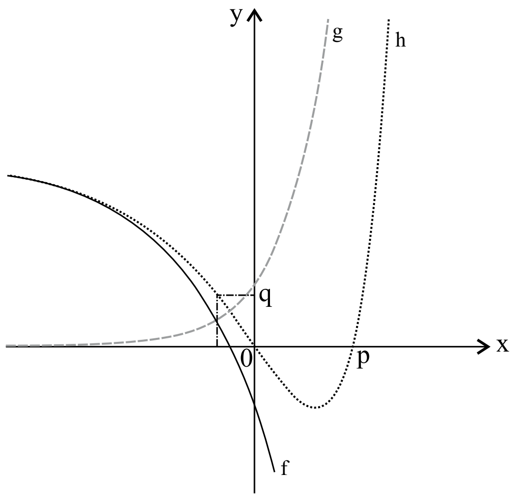
(ii) $g(x) = 2^{2x}$

(iii) $h(x) = f(x) + g(x)$, para qualquer x.

a) Indique, na figura de seu espaço de respostas, quais são os gráficos das funções f, g, h. Em seguida, calcule p.

b) Calcule q.

Resposta:



a) $h(x) = 2^{2x} - 2^{x+2} + 3$

Para $t = 2^x$, temos $h(t) = t^2 - 4t + 3$.

Fazendo $h(t) = 0$ para o cálculo de p, encontramos $t = 1$ ou $t = 3$, ou seja,

$$\begin{cases} 2^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ 2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3 \end{cases}$$

Segue que $p = \log_2 3$.

b) Calculando o valor de x para o qual f(x) = g(x), temos:

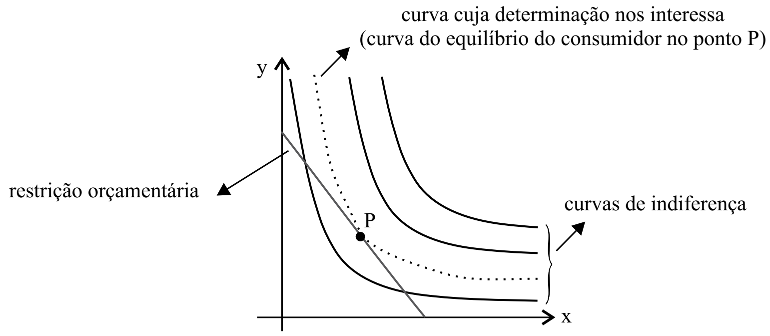
$3 - 2^{x+2} = 2^{2x} \rightarrow t = 2^x$, $t^2 + 4t - 3 = 0 \rightarrow t = -2 \pm \sqrt{7}$ (com $x \in$ IR, $t = \sqrt{7} - 2$)

$2^x = \sqrt{7} - 2 \rightarrow x = \log_2(\sqrt{7} - 2)$

Para $x = \log_2(\sqrt{7} - 2)$, 2^{2x} será igual a $2^{2\log_2(\sqrt{7}-2)}$, ou seja, $(\sqrt{7} - 2)^2 = 11 - 4\sqrt{7}$.

Segue que q é igual a $2(11 - 4\sqrt{7})$.

03. Em microeconomia, com alguma frequência, são estudados problemas envolvendo curvas de indiferença do consumidor com relação à aquisição de dois bens (x e y, por exemplo), em associação à curva de restrição orçamentária do consumidor para aquisição desses bens. Do ponto de vista matemático, o que interessa nesse tipo de problema é a identificação de uma função (a partir de uma família de funções das curvas de indiferença), cujo gráfico seja tangente ao gráfico da função de restrição orçamentária, bem como a determinação do ponto de tangência P, que representa o equilíbrio do consumidor.



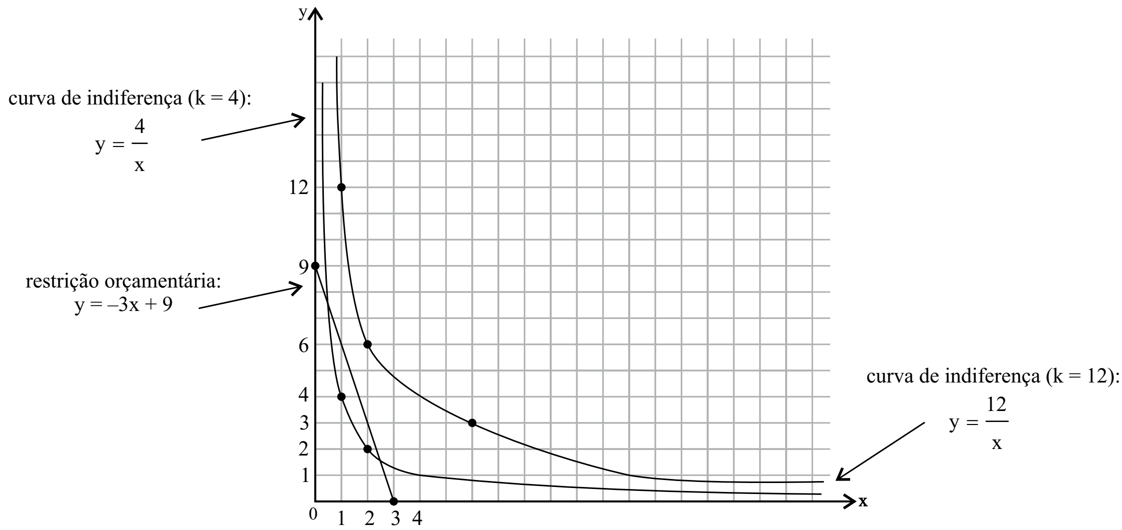
Admita que a família de curvas de indiferença (com x e y positivos) seja dada por $y = \frac{k}{x}$, com $k \in \left]0,100\right]$, e que a restrição orçamentária do consumidor em relação aos bens x e y seja dada por $y = -3x + 9$.

a) Faça um esboço, no plano cartesiano, dos gráficos da restrição orçamentária, e das curvas de indiferença para $k = 4$ e $k = 12$.

b) Determine o valor de k na situação de equilíbrio do consumidor e, em seguida, calcule as coordenadas do ponto P de equilíbrio do consumidor (observação: neste problema, tanto k, quanto x e y do ponto P não são números inteiros).

Resposta:

a)



b) Queremos determinar k na equação literal $-3x + 9 = \frac{k}{x}$ para que ela possua solução única. Portanto:

$$-3x^2 + 9x - k = 0$$

$$3x^2 - 9x + k = 0 \quad (\Delta = 0)$$

$$(-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$$

$$k = \frac{27}{4}$$

Segue que: $4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow P\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{2}\right)$

04. Os alunos de uma classe foram consultados sobre quatro possibilidades diferentes de horário para o exame final da disciplina (possibilidades A, B, C e D). Cada aluno ordenou sua preferência da 1.ª à 4.ª escolha (a 1.ª é a mais desejada, e a 4.ª a menos desejada). A apuração dos resultados dessa consulta mostrou que foram escolhidas apenas 9 ordenações diferentes, dentre as 24 possíveis. A tabela indica os resultados da consulta com os dados agrupados.

Número de votos	3	4	7	8	2	5	8	2	11
1.ª escolha	A	A	A	B	B	B	C	C	D
2.ª escolha	B	B	C	C	A	C	D	A	C
3.ª escolha	C	D	B	D	C	A	B	D	A
4.ª escolha	D	C	D	A	D	D	A	B	B

Exemplo: do total de 50 alunos, 3 preferem A à B, B à C e C à D (primeira coluna da tabela).

a) Usando os dados da tabela, determine o horário vencedor, e com que porcentagem de votos, em uma eleição majoritária simples.

Definição: eleição majoritária simples é aquela em que se leva em consideração apenas a 1.ª escolha de cada eleitor.

b) Admita, agora, que são atribuídos peso quatro (4 pontos) à 1.ª escolha de cada aluno, três (3 pontos) à 2.ª escolha, dois (2 pontos) à 3.ª escolha e um (1 ponto) à 4.ª escolha.

Dada a matriz $V_{1x9} = [3 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 2 \quad 5 \quad 8 \quad 2 \quad 11]$, determine a matriz P_{9x4} de forma que $V_{1x9} \cdot P_{9x4}$ resulte a matriz $T_{1x4} = [A \quad B \quad C \quad D]$ do total de pontos dos horários A, B, C e D. Em seguida, ordene a classificação dos quatro horários, do que obteve mais pontos para o que obteve menos pontos.

Resposta:

a) A: 3 + 4 + 7 = 14 votos
B: 8 + 2 + 5 = 15 votos
C: 8 + 2 = 10 votos
D: 11 votos

O horário B é o mais votado com 15 votos em 50, ou seja, com 30% dos votos.

b) $V_{1x9} \cdot P_{9x4} = T_{1x4} = [A \quad B \quad C \quad D]$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 5 & 8 & 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \end{bmatrix}$$

$A = 3\cdot4 + 4\cdot4 + 7\cdot4 + 8\cdot1 + 2\cdot3 + 5\cdot2 + 8\cdot1 + 2\cdot3 + 11\cdot2 = 116$
$B = 3\cdot3 + 4\cdot3 + 7\cdot2 + 8\cdot4 + 2\cdot4 + 5\cdot4 + 8\cdot2 + 2\cdot1 + 11\cdot1 = 124$
$C = 3\cdot2 + 4\cdot1 + 7\cdot3 + 8\cdot3 + 2\cdot2 + 5\cdot3 + 8\cdot4 + 2\cdot4 + 11\cdot3 = 147$
$D = 3\cdot1 + 4\cdot2 + 7\cdot1 + 8\cdot2 + 2\cdot1 + 5\cdot1 + 8\cdot3 + 2\cdot2 + 11\cdot4 = 113$

Classificação: 1.º o horário C, com 147 pontos,
2.º o horário B, com 124 pontos,
3.º o horário A, com 116 pontos,
4.º o horário D, com 113 pontos.