FUNDAÇÃO
GETULIO VARGAS

EESP
Escola de Economia
de São Paulo

PROCESSO SELETIVO/2010

CADERNO 1
Respostas da 2.ª Fase

Matemática

RESOLUÇÃO

FUNDAÇÃO
vunesp

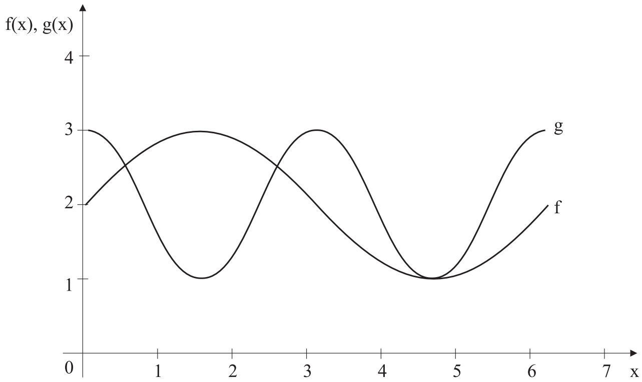
13.12.2009

01. **a)** Construa o gráfico das funções $f(x) = 2 + \text{sen } x$ e $g(x) = 2 + \cos 2x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

b) Admita que f(x) e g(x) indiquem as cotações das ações das empresas F e G na bolsa de valores de São Paulo no intervalo de horas $0 \leq x \leq 2\pi$ ($x = 0$ indica 12h00, e $x = 2\pi \approx 6{,}28$ indica, aproximadamente, 18h17). Determine algebricamente (equações e/ou inequações) o intervalo de horas, com $0 \leq x \leq 2\pi$, em que a cotação das ações da empresa F foi maior ou igual à cotação das ações da empresa G.

Resposta:

a)

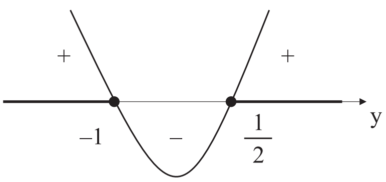


b) Com $0 \leq x \leq 2\pi$, tem-se

$2 + \text{sen } x \geq 2 + \cos 2x$

$2\,\text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 \geq 0$

$\text{sen } x = y \rightarrow 2y^2 + y - 1 \geq 0$



$$\text{sen } x \leq -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71 \rightarrow \text{aproximadamente 16h43}$$

$$\text{sen } x \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \rightarrow \text{aproximadamente } 0{,}52 \leq x \leq 2{,}62$$

aproximadamente de 12h31 até 14h37

02. Observe o padrão indicado na tabela a seguir:

x	3^x	7^x
0	**1**	**1**
1	**3**	**7**
2	**9**	4**9**
3	2**7**	34**3**
4	8**1**	240**1**
5	24**3**	1680**7**
6	72**9**	11764**9**
7	218**7**	82354**3**
8	656**1**	576480**1**
9	1968**3**	4035360**7**
…	…	…

a) Determine o algarismo da unidade de 3^{2009}.

b) Determine o algarismo da unidade de $3^{423} + 7^{651} - 2^{58}$.

Resposta:

a)

x	Algarismo da unidade de 3^x	Resto da divisão de x por 4
0, 4, 8, 12, …	1	0
1, 5, 9, 13, …	3	1
2, 6, 10, 14, …	9	2
3, 7, 11, 15, …	7	3

A divisão de 2009 por 4 resulta quociente 502 e resto 1. Analisando o resto, conclui-se que o algarismo da unidade de 3^{2009} é 3.

b)

x	Algarismo da unidade de 7^x	Resto da divisão de x por 4
0, 4, 8, 12, …	1	0
1, 5, 9, 13, …	7	1
2, 6, 10, 14, …	9	2
3, 7, 11, 15, …	3	3

x	Algarismo da unidade de 2^x	Resto da divisão de x por 4
1, 5, 9, 13, …	2	1
2, 6, 10, 14, …	4	2
3, 7, 11, 15, …	8	3
4, 8, 12, 14, …	6	0

A divisão de 423 por 4 resulta quociente 105 e resto 3. Analisando o resto, conclui-se que o algarismo da unidade de 3^{423} é 7.
A divisão de 651 por 4 resulta quociente 162 e resto 3. Analisando o resto, conclui-se que o algarismo da unidade de 7^{651} é 3.
A divisão de 58 por 4 resulta quociente 14 e resto 2. Analisando o resto conclui-se que o algarismo da unidade de 2^{58} é 4.
Segue que o algarismo da unidade de $3^{423} + 7^{651} - 2^{58}$ é 6.

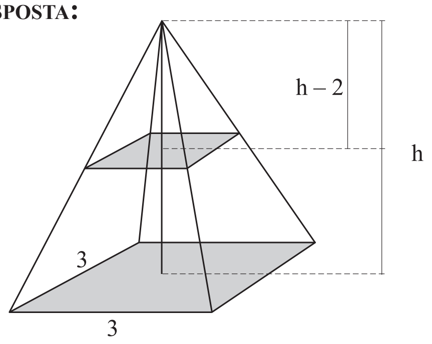
03. Uma pirâmide de base quadrada é seccionada por um plano paralelo à sua base, distante 2 m dela. A área total da pirâmide menor, obtida pela secção, é igual à metade da área total da pirâmide original.

a) Calcule a altura da pirâmide original.

b) Calcule o volume do tronco de pirâmide obtido pela secção para o caso em que a aresta da base da pirâmide maior mede 3 m.

Resposta:

a)



$$\left(\frac{h}{h-2}\right)^2 = \frac{\text{Área total da pirâmide original}}{\text{Área total da pirâmide menor}}, \text{ com } h > 2$$

$$\left(\frac{h}{h-2}\right)^2 = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{h}{h-1} = \pm\sqrt{2} \rightarrow h = 4 - 2\sqrt{2} \text{ (descartado porque } 2 - \sqrt{2} < 2)$$

$$\rightarrow h = 2(2 + \sqrt{2}) \text{ m}$$

b) $\dfrac{\text{Área total da pirâmide original}}{\text{Área total da pirâmide menor}} = \dfrac{9}{x}$, com x sendo a área da base da pirâmide menor.

$$\frac{2}{1} = \frac{9}{x} \rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ m}$$

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}.3^2.(4 + 2\sqrt{2}) - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot(4 + 2\sqrt{2} - 2)$$

$$V_{tronco} = 3(3 + \sqrt{2})\text{m}^3$$

04. Sabe-se que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2009}$ representa um arranjo aleatório dos números 1, 2, 3, … , 2009.

a) Determine se o produto $(a_1 - 1).(a_2 - 2).(a_3 - 3). \ldots (a_{2009} - 2009)$ é um número par ou ímpar, justificando sua resposta com argumentos matemáticos.

b) Qual é a probabilidade de que o arranjo $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2009}$ tenha seus 1 000 primeiros termos em progressão aritmética de razão 2? (não há necessidade de fazer cálculos, apenas deixe seu resultado indicado com notação fatorial)

Resposta:

a) Um produto de números inteiros é par se, e somente se, pelo menos um dos fatores é par.
A diferença de dois números inteiros é ímpar se, e somente se, um deles for par e o outro ímpar.
De 1 a 2009, há 1004 números pares e 1005 números ímpares. Tomando para cada número ímpar de 1 a 2009 um elemento a_n par, sobrará um número ímpar k para o qual a_n deverá ser ímpar. Assim, $k - a_n$ será par. Portanto, o produto indicado é par.

1 ponto por identificar situações onde o produto de dois fatores é par ou ímpar.
1 ponto por finalizar corretamente o exercício.

b) Há 11 progressões aritméticas possíveis de serem obtidas nessas condições. Para cada uma delas, restam 1009 elementos que podem ser permutados nas posições 1001 a 2009. Logo, n(A) = 11.1009! e, portanto, $P(A) = \dfrac{11.1009!}{2009!}$.