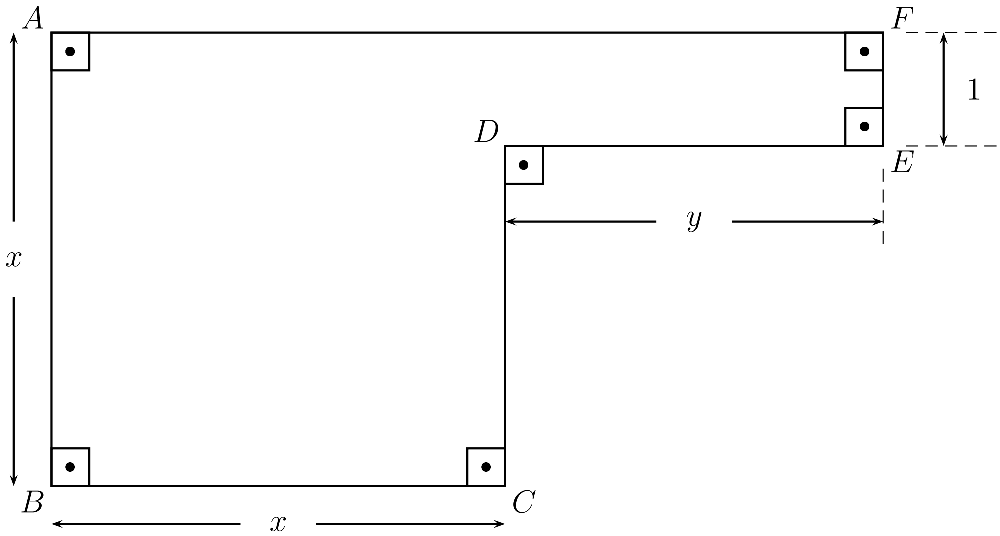
1. O polígono $ABCDEF$ da figura abaixo tem área 23, e o triângulo ADF tem área 5,5.



Calcule os valores de x e y.

2. Uma nova loteria foi inventada, a "trigoloteria". Nessa loteria, um apostador precisa escolher apenas um número θ no intervalo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Depois disso, o apostador gira duas roletas A e B ao mesmo tempo duas vezes. Os resultados de cada roleta podem ser apenas "prêmio" ou "perdeu". O apostador ganha na trigoloteria se obtiver duas vezes consecutivas o resultado "prêmio" em pelo menos uma das roletas. A tabela abaixo indica as probabilidades das duas roletas fornecerem o resultado "prêmio"em cada uma das duas rodadas.

Roleta	A	B
1a. rodada	$\text{sen}(\theta)$	$\cos(\theta)$
2a. rodada	$\cos(\theta)$	$\text{sen}(\theta)$

(a) Calcule, em função de θ, a probabilidade de uma pessoa que aposta uma vez não ganhar na trigoloteria.

(b) Determine o valor de θ para o qual a probabilidade de alguém que faz uma aposta não ganhar na trigoloteria é a menor possível.

3. A média semestral de um estudante que cursa uma determinada disciplina é calculada com base nas notas de três avaliações que ele realiza durante o semestre (A_1, A_2 e A_3). A tabela abaixo indica os pesos atribuídos a cada cada avaliação.

Avaliação	A_1	A_2	A_3
Peso	40%	20%	40%

Para incentivar seus alunos a não faltarem na avaliação A_2, o professor dessa disciplina determinou a seguinte regra de cálculo para quem faltasse nessa avaliação: adotar para A_2 um valor igual a menos raiz quadrada do valor de A_3, ou seja:

$$\text{Valor para } A_2 = -\sqrt{\text{Valor de } A_3}.$$

(a) Se um estudante tirou nota dez na avaliação A_1 e faltou na avaliação A_2, qual a nota que ele precisa tirar em A_3 para ficar com média semestral igual a 7?

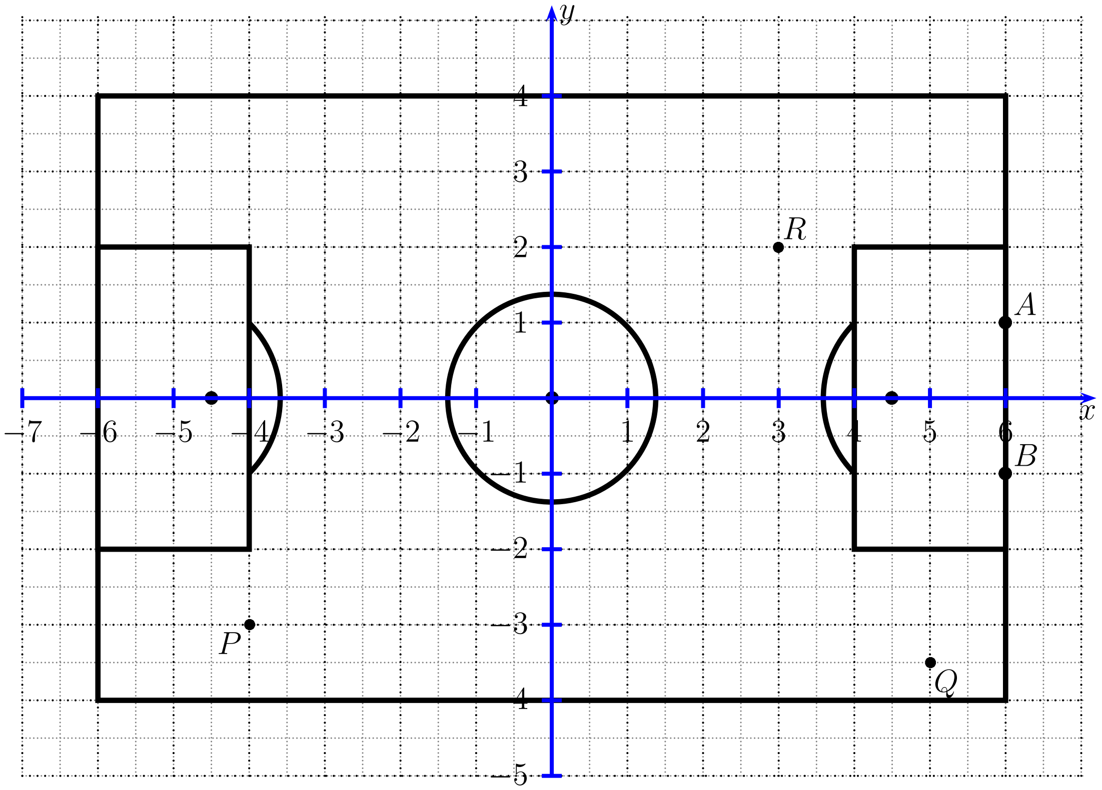
(b) Um estudante tirou dez na avaliação A_1 e faltou na avaliação A_2. Qual é o menor valor possível para a média semestral desse estudante?

4. Considere a expressão $y = \cos(2^x)$, em que $x \in \mathbb{R}$, para responder o que se pede a seguir.

(a) Determine o menor valor real de x para o qual $\cos(2^x) = 1$.
Dados: $\log 2 \approx 0,30$ e $\log \pi \approx 0,50$.

(b) Sabendo que $\cos(2^x) = \frac{3}{4}$, calcule $\cos(2^{x+1})$.

5. A figura abaixo ilustra um campo de futebol.



Um jogador posicionado no ponto P fará um lançamento para o atacante de seu time que está no lado oposto do campo sobre o ponto Q, de modo que a bola siga a trajetória da reta de equação $x - 7y - 17 = 0$. O jogador não goleiro do time adversário que está mais à direita no campo, localiza-se sobre o ponto R. Para que não seja considerado "impedido", o atacante precisa, no momento do lançamento, estar num ponto alinhado verticalmente (paralelo ao eixo Oy) ou mais à esquerda do que o ponto R.

(a) Determine a menor distância que o atacante precisará correr para chegar à linha de trajetória da bola sem ser considerado impedido.

(b) O objetivo do atacante é chutar para o gol delimitado pelas traves que estão sobre os pontos A e B. Para isso, ele pretende pegar a bola sobre o ponto que gerou a distância mínima do item anterior, correr com ela para a esquerda numa trajetória paralela ao eixo Ox até um ponto C, localizado a uma distância k da linha do fim do campo (reta $\overleftrightarrow{AB}$), e chutar para o gol. Determine k para que o ângulo de visão do atacante ($\angle A\widehat{C}B$) seja o maior possível. $\left(\text{Se necessário, utilize a fórmula } \mathrm{tg}(\beta-\alpha) = \dfrac{\mathrm{tg}(\beta)-\mathrm{tg}(\alpha)}{1+\mathrm{tg}(\beta)\mathrm{tg}(\alpha)}.\right)$

6. O frasco de um determinado perfume tem a forma de um cilindro cuja base é um círculo de diâmetro $2cm$ e cuja altura mede $9,9cm$. Para ser exportado em grandes quantidades, esses frascos são primeiro embalados em caixinhas de base quadrada (lado igual a $2cm$) e altura medindo $10cm$. Essas caixinhas são depois acondicionadas em caixas cúbicas maiores de lado $40cm$, sem que sobre espaço dentro da caixa grande. (Considere o volume de perfume dentro de um frasco como sendo igual ao volume do frasco e utilize nos seus cálculos $\pi \cong \frac{311}{99}$.)

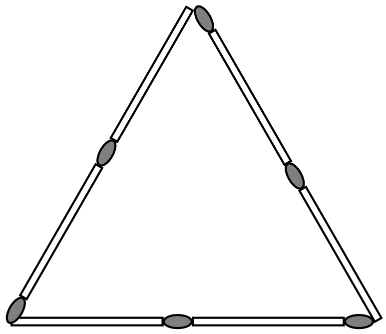
(a) Determine o volume do espaço que sobra dentro de cada caixinha de embalagem individual quando o frasco de perfume é ali inserido.

(b) O fabricante desse perfume contratou um *designer* de embalagem para estudar uma forma de desperdiçar menos espaço no transporte desse produto. As recomendações desse estudo foram as seguintes:

- fornecer $0,9cm^3$ a mais de perfume por frasco, aumentando nessa mesma quantidade o volume do frasco;
- mudar a forma do frasco para um paralelepípedo de base quadrada e altura $8cm$ e acondicioná-los em caixinhas de mesmas dimensões.

Determine quantos frascos a mais poderão ser acondicionados em cada caixa grande.

7. Um menino tem como passatempo construir triângulos com palitos de fósforo idênticos, como o mostrado na figura abaixo.



Observe que, para formar cada lado do triângulo, os palitos são colocados alinhados, com suas extremidades se tocando. Além disso, ele sempre usa um número inteiro de palitos em cada lado.

(a) Se quiser usar exatamente 8 palitos para construir um triângulo nessas condições, quantos palitos serão usados em cada lado?

(b) Considerando que cada palito tem comprimento 1 “palito”, calcule a área do triângulo descrito no item (a) em “palitos quadrados”.

8. X é uma seqüência finita e não decrescente de números inteiros positivos. Considere que as seguintes afirmações são verdadeiras para os elementos dessa seqüência:

    I. 3 é um valor que aparece na seqüência.

    II. A média aritmética dos elementos de X é igual a 3.

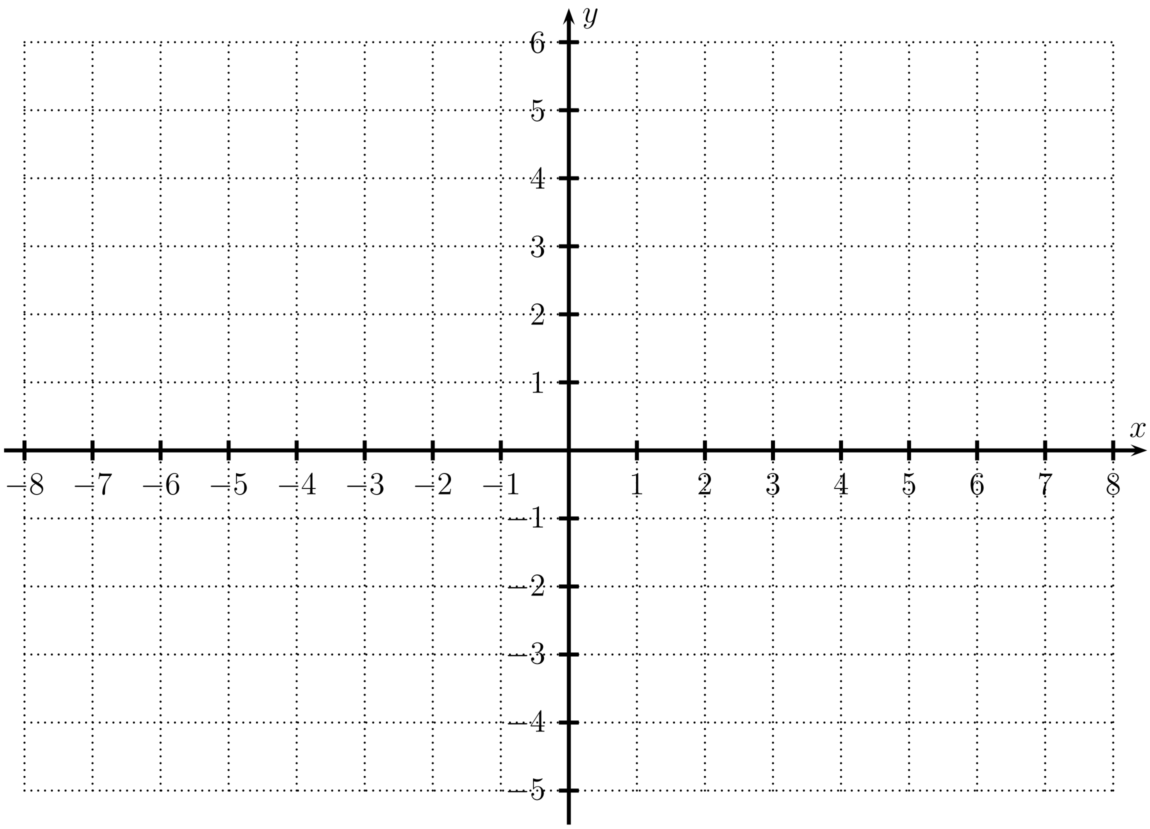
    III. O maior elemento de X é o número 10.

    (a) Seja $\mathcal{S}$ o menor valor que a soma dos elementos de X que são menores do que 3 pode assumir. Determine o valor de $\mathcal{S}$.

    (b) Suponha que a soma dos valores menores do que 3 é igual a $\mathcal{S}$, ou seja, é a menor possível. Se há na seqüência X apenas um elemento que se repete, determine-a explicitamente, ou seja, escreva ordenadamente todos os elementos que a compõem.

9. Considere a função f dada pela lei $f(x) = ||x| - 4|$.

(a) Esboce o gráfico da função f no sistema cartesiano fornecido abaixo.



(b) Sendo a um número real, determine todos os valores de a para os quais a equação $f(x) = a \cdot |x|$ possui exatamente quatro soluções reais.

10. Os participantes do programa de televisão "*Show da Lógica*" foram desafiados a descobrir o valor de um número inteiro n compreendido entre 1 e 100. Para tanto, foram fornecidas três informações sobre n, todas verdadeiras, reproduzidas abaixo.

    (1) Se n é ímpar, então n é um quadrado perfeito.

    (2) Se n é par, então o resto da divisão de n por 11 é igual a 5.

    (3) A soma dos algarismos de n é igual a 11 se, e somente se, n é menor do que 30.

    Um dos participantes disse, então, que não era possível descobrir o valor de n, pois havia mais de um número inteiro entre 1 e 100 que satisfazia as condições dadas. Descubra quais são esses números, explicando seu raciocínio.