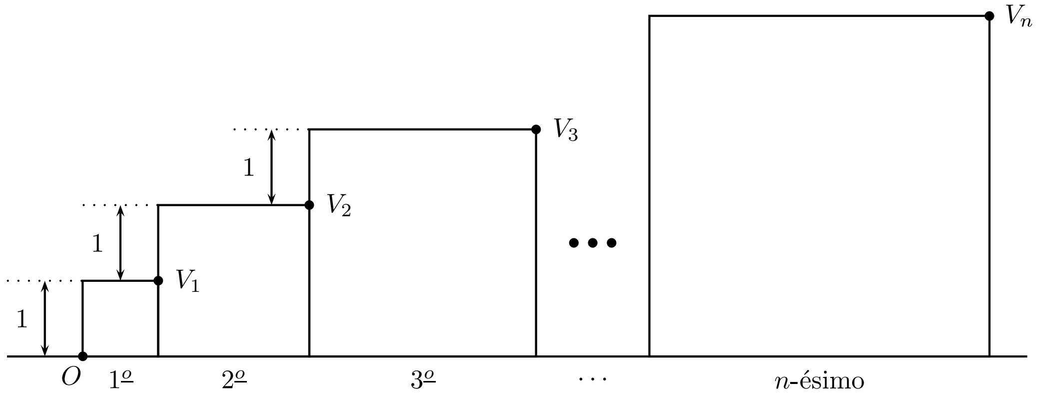
1. A média das idades dos seis jogadores titulares de um time de vôlei é 27 anos e a média das idades dos seis jogadores reservas é 24 anos. Devido a uma contusão, um dos jogadores titulares foi afastado da equipe. Com isso, um dos reservas assumiu seu lugar no sexteto titular, ficando a equipe com apenas cinco reservas. Após a substituição, a média das idades dos titulares caiu para 26 anos, enquanto a dos reservas subiu para 24,8 anos. A idade do jogador que foi afastado por contusão é

   (a) 26 anos.
   (b) 27 anos.
   (c) 28 anos.
   (d) 29 anos.
   (e) 30 anos.

2. Na sequência de quadrados representada na figura abaixo, o lado do primeiro quadrado mede 1. A partir do segundo, a medida do lado de cada quadrado supera em 1 unidade a medida do lado do quadrado anterior.




   A distância do ponto $O$, vértice do primeiro quadrado, até o ponto $V_n$, vértice do $n$-ésimo quadrado, ambos indicados na figura, é

   (a) $\frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}$.
   (b) $\frac{n}{2}\sqrt{n^2-2n+9}$.
   (c) $\frac{n}{2}\sqrt{n^2+4n+3}$.
   (d) $n\sqrt{n^2+2n-1}$.
   (e) $n\sqrt{n^2+2n+2}$.

3. O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo "radianos"e calculassem o valor de sen $\frac{\pi}{2}$. Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número 1,6 e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor $A$. Já Bia calculou o seno de 1,5, obtendo o valor $B$. Considerando que $\frac{\pi}{2}$ vale aproximadamente 1,5708, assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores $A$, $B$ e sen $\frac{\pi}{2}$.

   (a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < A < B$.
   (b) $A < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < B$.
   (c) $A < B < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$.
   (d) $B < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} < A$.
   (e) $B < A < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$.

4. A área da região sombreada na Figura **1**, limitada pelo gráfico da função $f(x) = 9 - x^2$ e pelos eixos coordenados, é igual a 18.

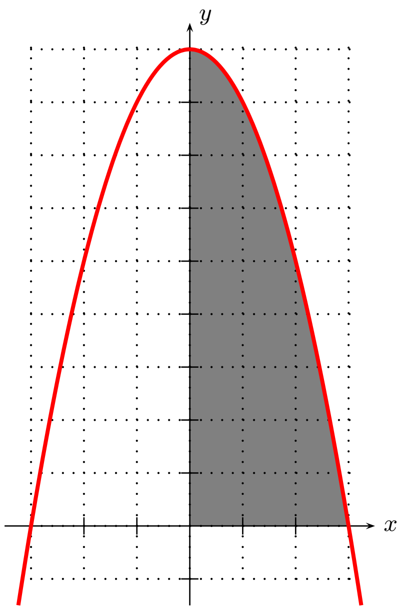



Figura **1**

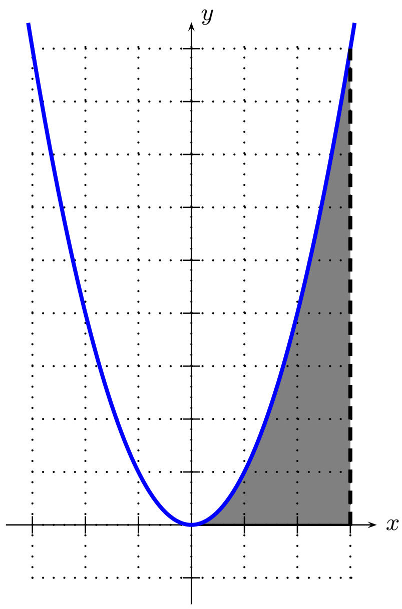



Figura **2**

   Assim, a área da região sombreada na Figura **2**, limitada pelo gráfico da função $g(x) = x^2$, pelo eixo $x$ e pela reta de equação $x = 3$, é igual a

   (a) 4,5.
   (b) 6.
   (c) 9.
   (d) 12.
   (e) 13,5.

5. Considere dois polinômios do 1º grau $P(x)$ e $Q(x)$, ambos de coeficientes reais, tais que

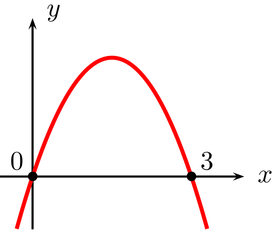
$$P(3) = Q(3) = 0, \quad P(6) > 0 \quad \text{e} \quad Q(6) < 0.$$

Sendo $f$ a função definida, para todo $x \in \mathbb{R}$, por

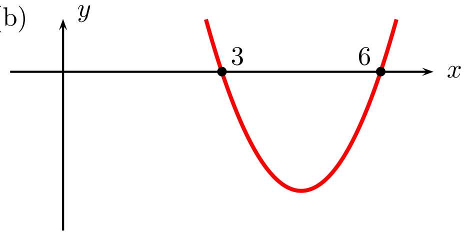
$$f(x) = P(x) \cdot Q(x),$$

a única figura, dentre as apresentadas a seguir, que pode representar o gráfico de $f$ é

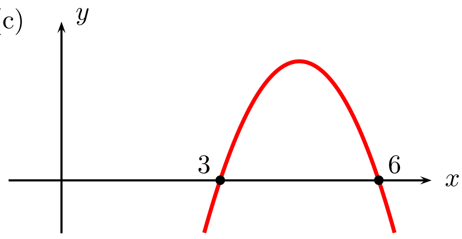
(a)



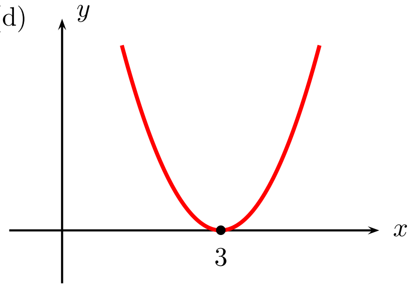

(b)



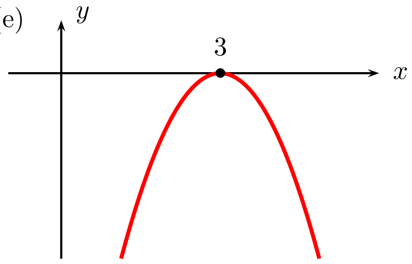

(c)



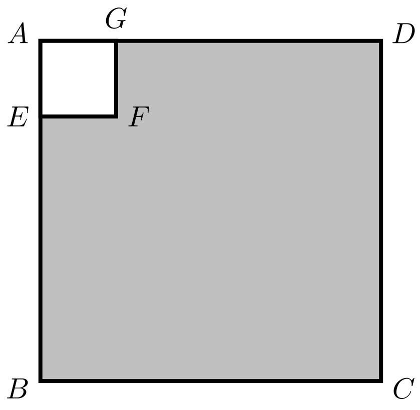

(d)




(e)




6. Na figura a seguir, o lado do quadrado $ABCD$ mede 876,55 m e o lado do quadrado $AEFG$ mede 123,45 m.




A área da região sombreada, em km$^2$, vale

(a) 0,8642.
(b) 0,7913.
(c) 0,7654.
(d) 0,7531.
(e) 0,6936.

7. Em uma sequência, cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Se o primeiro termo vale 18 e o sétimo termo vale 122, então o segundo termo da sequência é

   (a) 2.
   (b) 4.
   (c) 6.
   (d) 8.
   (e) 10.

8. Considere $N$ o menor número inteiro positivo tal que $\log(\log(\log N))$ seja um inteiro não negativo. O número $N$, representado no sistema de numeração decimal, possui

   (a) 2 algarismos.
   (b) 3 algarismos.
   (c) 10 algarismos.
   (d) 11 algarismos.
   (e) 100 algarismos.

9. As duas afirmações a seguir foram retiradas de um livro cuja finalidade era revelar o segredo das pessoas bem sucedidas.

   I. Se uma pessoa possui muita força de vontade, então ela consegue atingir todos os seus objetivos.
   II. Se uma pessoa consegue atingir todos os seus objetivos, então ela é bem sucedida.

   Dentre as alternativas abaixo, a única que relaciona corretamente a veracidade ou a falsidade das duas afirmações é

   (a) se a afirmação I é falsa, então a afirmação II é necessariamente verdadeira.
   (b) se a afirmação I é falsa, então a afirmação II é necessariamente falsa.
   (c) se a afirmação I é verdadeira, então a afirmação II é necessariamente falsa.
   (d) se a afirmação II é falsa, então a afirmação I é necessariamente falsa.
   (e) se a afirmação II é verdadeira, então a afirmação I é necessariamente verdadeira.

**Texto para as questões 10 e 11**

De acordo com as regulamentações de um país para o setor de aviação, as empresas aéreas podem emitir, para um voo qualquer, um número de bilhetes até 10% maior do que a lotação da aeronave, uma vez que é muito comum que alguns passageiros não compareçam no momento do embarque.

10. Uma empresa opera uma rota ligando duas cidades desse país. Tanto para o voo das 8h quanto para o das 9h de um determinado dia, realizados em aeronaves de mesma lotação, a empresa emitiu um número de bilhetes exatamente 10% maior do que a lotação das aeronaves. Para o voo das 8h compareceram todos os que compraram o bilhete, e parte deles teve de ser remanejada para o voo das 9h. Se todos os que compraram o bilhete para o voo das 9h comparecerem, também será necessário um remanejamento. Para que isso não ocorra, a porcentagem máxima dos passageiros que compraram bilhete para o voo das 9h que pode comparecer no momento do embarque é

    (a) 90%.
    (b) 87%.
    (c) 82%.
    (d) 80%.
    (e) 75%.

11. Para um voo realizado nesse país em uma aeronave de 20 lugares, foram emitidos 22 bilhetes. A empresa responsável pelo voo estima que a probabilidade de qualquer um dos 22 passageiros não comparecer no momento do embarque seja de 10%. Considerando que os comparecimentos de dois passageiros quaisquer sejam eventos independentes, a probabilidade de que compareçam exatamente 20 passageiros no embarque desse voo, de acordo com a estimativa da empresa, é igual a

    (a) $(0,1)^2 \cdot (0,9)^{22}$.
    (b) $231 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{20}$.
    (c) $190 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{20}$.
    (d) $190 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{18}$.
    (e) $153 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{18}$.

12. Leia o texto a seguir.

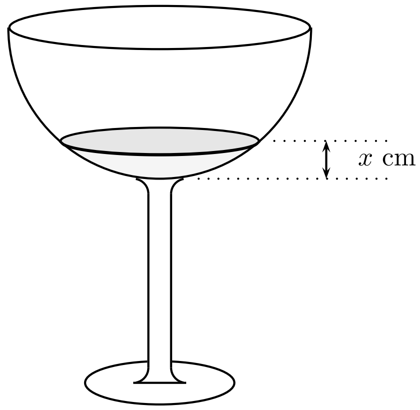
    *Existe uma matriz quadrada $M$ de ordem 2 que possui uma propriedade bem interessante: sendo $A$ outra matriz quadrada de ordem 2, o produto $A \cdot M$ sempre resulta numa matriz que tem em sua diagonal principal os elementos da diagonal secundária de $A$ e em sua diagonal secundária os elementos da diagonal principal de $A$.*

    Dentre as opções abaixo, a única que pode representar a matriz $M$ descrita acima é

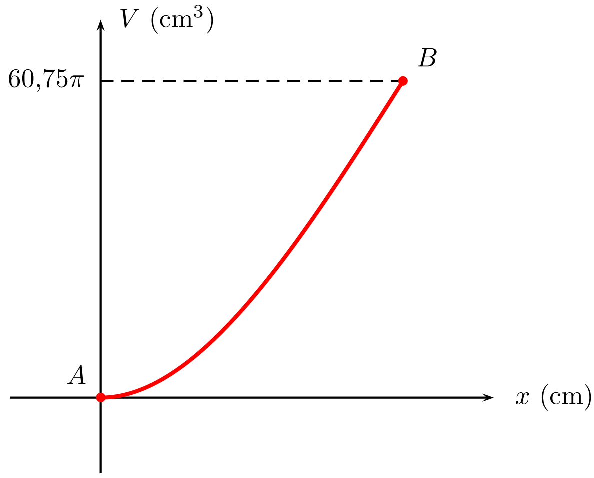
    (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
    (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
    (e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Texto para as questões 13 e 14**

A taça desenhada na figura tem a forma de semiesfera e contém líquido até uma altura de $x$ cm.




O volume de líquido contido na taça, em $\text{cm}^3$, depende da altura atingida por esse líquido, em cm. O gráfico a seguir mostra essa dependência, sendo que os pontos $A$ e $B$ correspondem à taça totalmente vazia e totalmente cheia, respectivamente.




13. De acordo com os dados do gráfico, a taça tem a forma de uma semiesfera cujo raio mede

    (a) 3 cm.
    (b) 3,5 cm.
    (c) 4 cm.
    (d) 4,5 cm.
    (e) 5 cm.

14. Uma pessoa colocou um líquido nessa taça até a altura correspondente a um terço do raio da semiesfera. O volume de líquido colocado na taça nessa situação

    (a) é menor do que $20{,}25\pi$ $\text{cm}^3$.
    (b) é igual a $20{,}25\pi$ $\text{cm}^3$.
    (c) está entre $20{,}25\pi$ $\text{cm}^3$ e $40{,}5\pi$ $\text{cm}^3$.
    (d) é igual a $40{,}5\pi$ $\text{cm}^3$.
    (e) está entre $40{,}5\pi$ $\text{cm}^3$ e $60{,}75\pi$ $\text{cm}^3$.

15. A multiplicação de matrizes quadradas de ordem 2 possui, sob vários aspectos, semelhanças com a composição de funções. Para começar, as duas operações ***não são comutativas***, isto é,

(1) existem matrizes quadradas $M$ e $N$ de ordem 2 tais que $(M \times N) \neq (N \times M)$;

(2) existem funções $f$ e $g$ tais que $(f \circ g) \neq (g \circ f)$, ou seja, $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

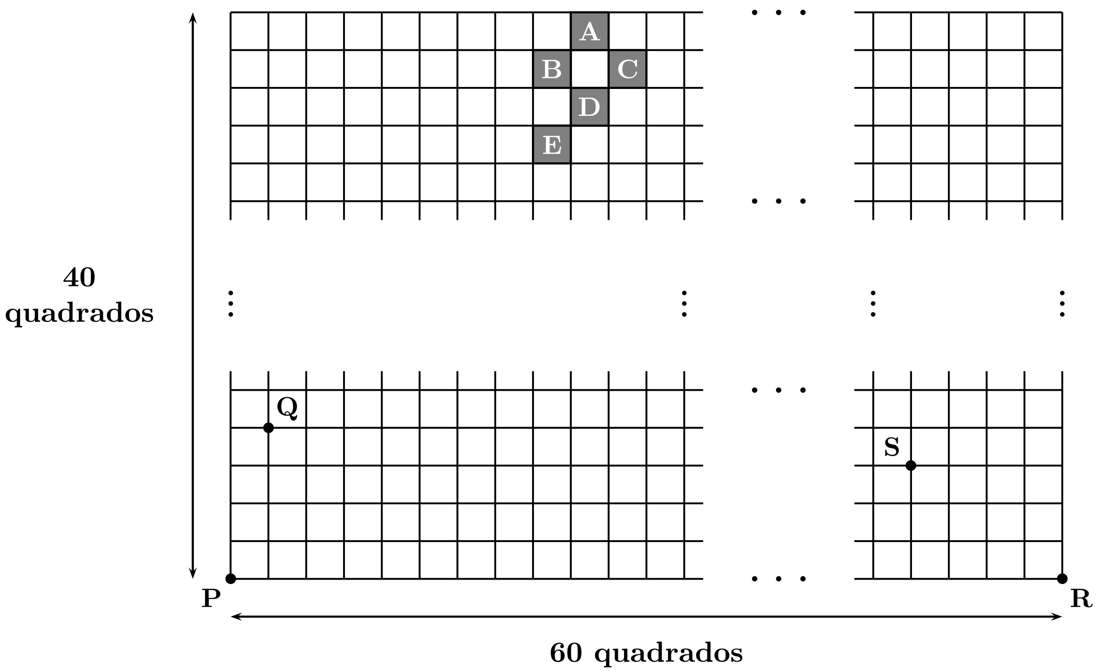
Além disso, as duas operações possuem um elemento neutro. No caso da multiplicação de matrizes, trata-se da matriz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para qualquer matriz quadrada $M$ de ordem 2, tem-se que

$$M \times I = I \times M = M.$$

O elemento neutro da operação de composição de funções é a função $i$ dada pela lei

(a) $i(x) = 1$.
(b) $i(x) = \frac{1}{x}$.
(c) $i(x) = (x-1)(x+1)$.
(d) $i(x) = |x|$.
(e) $i(x) = x$.

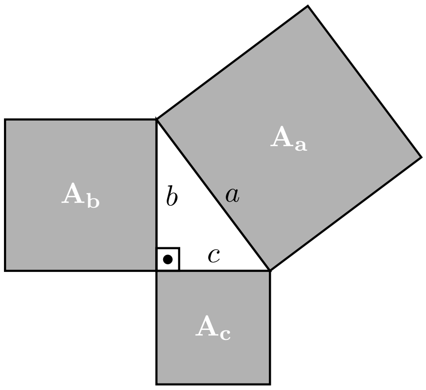
16. Na malha quadriculada $40 \times 60$ esquematizada na figura a seguir, estão marcados os pontos $P$, $Q$, $R$ e $S$.




A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ intercepta a reta $\overleftrightarrow{RS}$ em um ponto que pertence ao interior de um dos quadrados sombreados. Esse quadrado está identificado pela letra

(a) $A$.
(b) $B$.
(c) $C$.
(d) $D$.
(e) $E$.

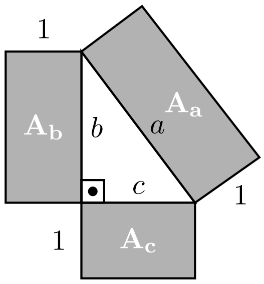
17. Considere a figura a seguir, na qual foram construídos quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo $a$ e catetos medindo $b$ e $c$.




A partir dessa figura, pode-se enunciar o teorema de Pitágoras:

*Se* $\mathbf{A_a}$, $\mathbf{A_b}$ *e* $\mathbf{A_c}$ *são as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, conforme indicado na figura, então vale a igualdade* $\mathbf{A_a} = \mathbf{A_b} + \mathbf{A_c}$.

Considere agora que, sobre os lados do mesmo triângulo retângulo, sejam construídos retângulos de altura unitária, conforme a figura.




A partir da igualdade expressa no teorema de Pitágoras, assinale a alternativa que completa a sentença a seguir, baseada na nova figura.

*Se* $\mathbf{A_a}$, $\mathbf{A_b}$ *e* $\mathbf{A_c}$ *são as áreas dos retângulos de altura unitária construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, conforme indicado na figura, então vale a igualdade*

(a) $\frac{\mathbf{A_a}}{a} = \frac{\mathbf{A_b}}{b} + \frac{\mathbf{A_c}}{c}$.

(b) $a\mathbf{A_a} = b\mathbf{A_b} + c\mathbf{A_c}$.

(c) $\frac{\mathbf{A_a}^2}{a} = \frac{\mathbf{A_b}^2}{b} + \frac{\mathbf{A_c}^2}{c}$.

(d) $a\mathbf{A_a}^2 = b\mathbf{A_b}^2 + c\mathbf{A_c}^2$.

(e) $a^2\mathbf{A_a} = b^2\mathbf{A_b} + c^2\mathbf{A_c}$.

18. O menor número inteiro e positivo que deve ser multiplicado por 2.012 para que o resultado obtido seja um cubo perfeito é

(a) 8.048.

(b) 253.009.

(c) 506.018.

(d) 1.012.036.

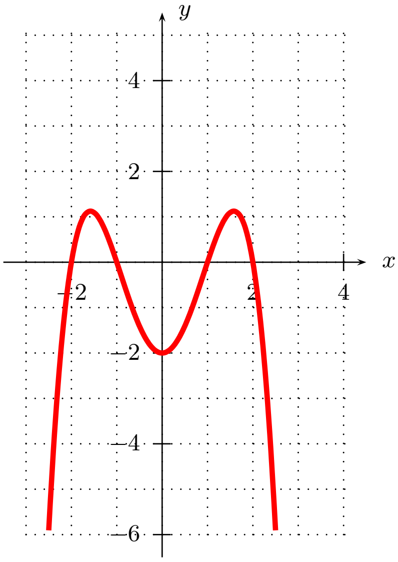
(e) 4.048.144.

19. Considere um polinômio $p(x)$, de grau 3 e coeficientes reais, tal que a equação

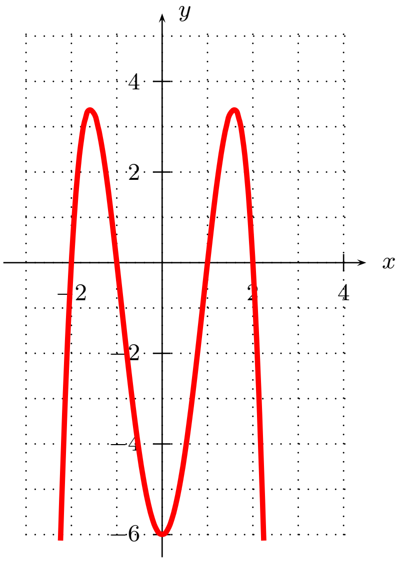
$$[p(x)]^2 = 3 \cdot p(x)$$

possua um total de 4 raízes reais, todas de multiplicidade 1. Dentre as figuras apresentadas abaixo, a única que pode representar o gráfico de $p(x)$ é

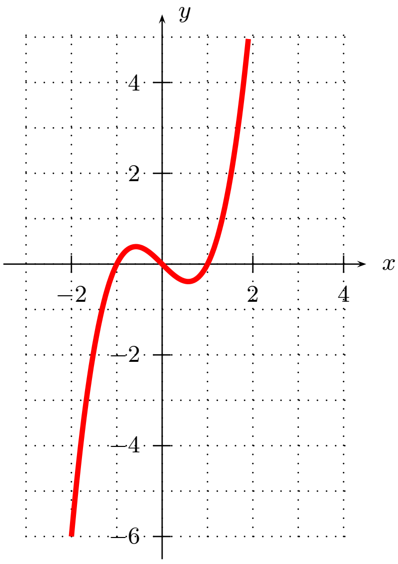
(a)



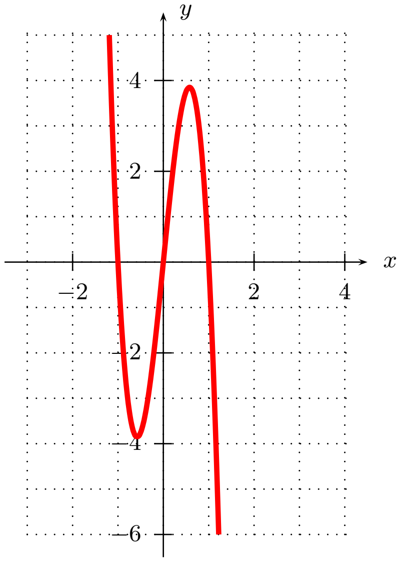

(b)



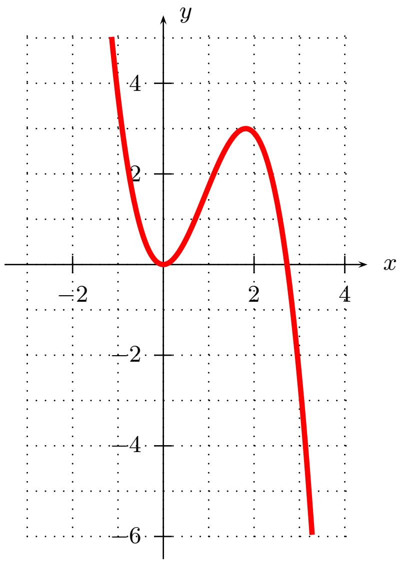

(c)




(d)



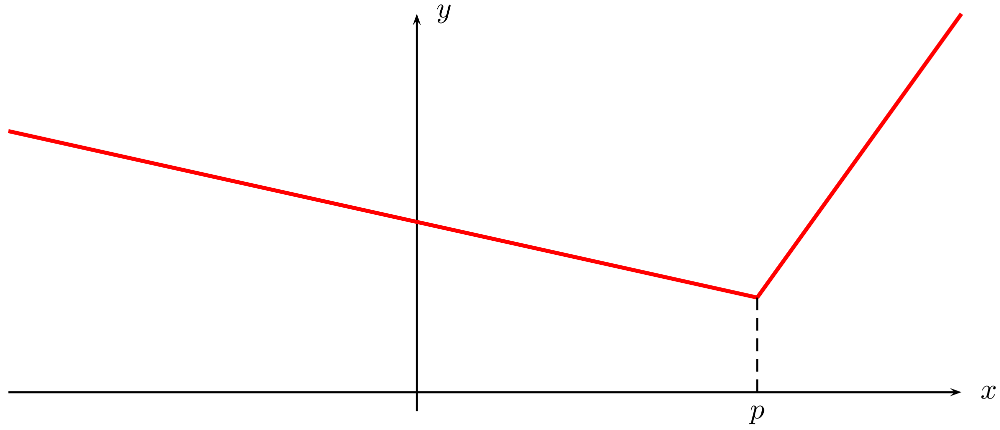

(e)



20. Sendo $p$ uma constante real positiva, considere a função $f$, dada pela lei

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{p} + \frac{9}{4}, & \text{se } x \leq p \\ px - 2p, & \text{se } x \geq p \end{cases},$$

e cujo gráfico está desenhado a seguir, fora de escala.




Nessas condições, o valor de $p$ é igual a

(a) $\frac{1}{2}$.
(b) 1.
(c) $\frac{3}{2}$.
(d) 2.
(e) $\frac{5}{2}$.

21. Em um campeonato disputado por 20 equipes, quatro delas são consideradas "times grandes". Numa rodada desse campeonato, na qual todas as 20 equipes disputaram um único jogo, houve exatamente três partidas envolvendo pelo menos um time grande. O total de gols marcados nessas três partidas foi 2. Apenas com essas informações, conclui-se que nessa rodada, necessariamente,

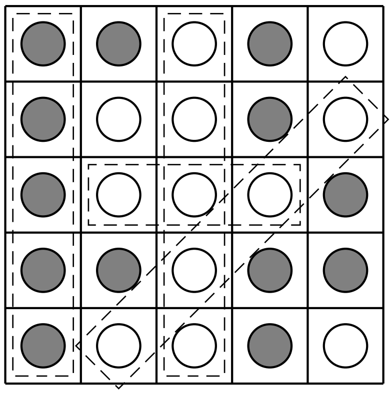
(a) pelo menos um time grande marcou um gol.
(b) pelo menos uma partida envolvendo um time grande não terminou empatada.
(c) nenhum time grande marcou mais de um gol.
(d) no mínimo um e no máximo dois times grandes venceram sua partida.
(e) no mínimo um e no máximo três times grandes tiveram 0 a 0 como resultado.

**Texto para as questões 22 e 23**

Um jogo é disputado por duas pessoas em um tabuleiro quadrado $5 \times 5$. Cada jogador, de maneira alternada, escolhe uma casa vazia do tabuleiro para ocupá-la com uma peça da sua cor. Ao final do jogo, se conseguiu ocupar 3 ou mais casas alinhadas e consecutivas com peças da sua cor, um jogador ganha pontos de acordo com a tabela abaixo.

| Número de casas alinhadas | Pontos obtidos |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 4 | 4 |
| 5 | 10 |

Entende-se por casas alinhadas aquelas que estejam numa mesma vertical, numa mesma horizontal ou numa mesma diagonal. No jogo mostrado abaixo, por exemplo, o jogador das peças claras marcou 15 pontos e o das peças escuras marcou 10 pontos.

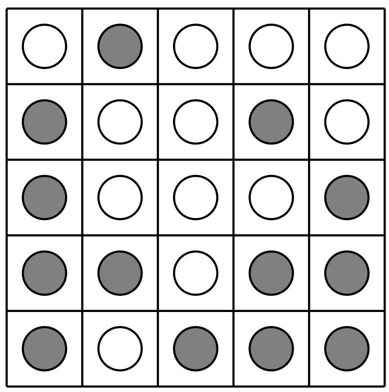


Peças claras: $10 + 4 + 1 = 15$ pontos

Peças escuras: 10 pontos

O jogo termina quando todas as casas são ocupadas.

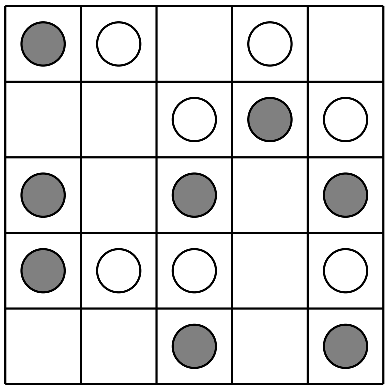
22. Um jogo entre duas pessoas terminou com o tabuleiro preenchido como mostra a figura.



A soma dos pontos obtidos pelos dois jogadores foi

(a) 19.
(b) 20.
(c) 21.
(d) 22.
(e) 23.

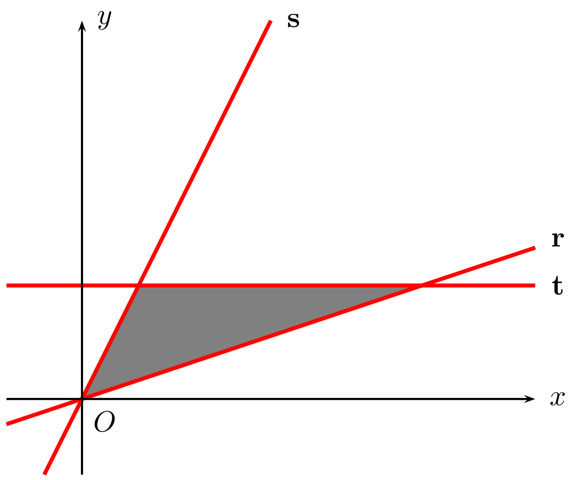
23. A figura mostra a situação de um tabuleiro durante um jogo no momento em que 15 casas já haviam sido ocupadas.



Nessa configuração, o número máximo de pontos que o jogador das peças escuras poderá acumular ao final do jogo é

(a) 23.
(b) 24.
(c) 25.
(d) 26.
(e) 27.

24. No plano cartesiano, as retas $r$ e $s$ têm coeficientes angulares iguais a $\frac{1}{3}$ e 2, respectivamente, e a reta $t$ tem equação $y = k$, sendo $k$ uma constante positiva.




Se a área do triângulo destacado na figura é $A$, então o valor de $k$ é

(a) $\sqrt{\dfrac{4A}{5}}$.
(b) $\sqrt{\dfrac{6A}{5}}$.
(c) $\sqrt{\dfrac{5A}{4}}$.
(d) $\sqrt{\dfrac{7A}{4}}$.
(e) $\sqrt{\dfrac{3A}{2}}$.

**Texto para as questões 25 e 26**

Considere um losango $ABCD$ em que $M$, $N$, $P$ e $Q$ são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Um dos ângulos internos desse losango mede $\alpha$, sendo $0° < \alpha < 90°$.

25. Nessas condições, o quadrilátero convexo $MNPQ$

(a) é um quadrado.

(b) é um retângulo que não é losango.

(c) é um losango que não é retângulo.

(d) é um paralelogramo que não é retângulo nem losango.

(e) não possui lados paralelos.

26. Se $\alpha = 60°$, então a razão entre o perímetro do losango $ABCD$ e o perímetro do quadrilátero $MNPQ$, nessa ordem, é igual a

(a) $\sqrt{3} + 1$.

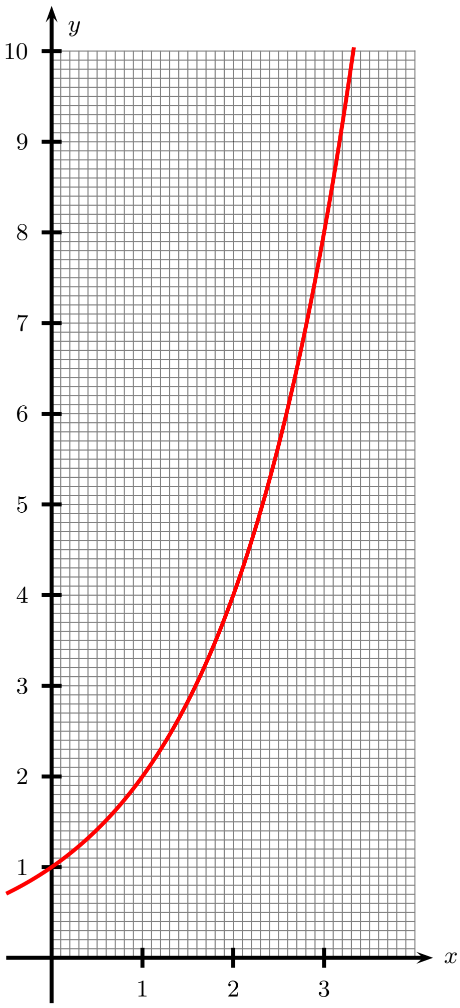
(b) 2.

(c) $\sqrt{3}$.

(d) $\frac{3}{2}$.

(e) $2\sqrt{3} - 2$.

27. Para estimar o valor de $\log_{128} 7$, uma pessoa dispunha somente do gráfico da função $f(x) = 2^x$, reproduzido ao lado fora de escala. Utilizando os dados do gráfico e algumas propriedades das potências, essa pessoa pôde concluir que $\log_{128} 7$ vale, aproximadamente,




(a) 0,1.

(b) 0,2.

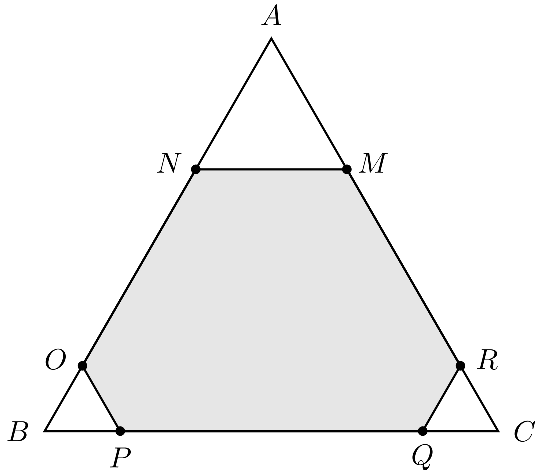
(c) 0,3.

(d) 0,4.

(e) 0,5.

28. Na figura a seguir, os pontos $M$, $N$, $O$, $P$, $Q$ e $R$ pertencem aos lados do triângulo equilátero $ABC$, de perímetro 6 cm, de modo que

- $AM = AN = 2x$ cm;
- $BO = BP = CQ = CR = x$ cm.




Se a área do hexágono $MNOPQR$ é metade da área do triângulo $ABC$, então o valor de $x$ é igual a

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(e) $\frac{1}{4}$.

29. Uma função $f$, cujo domínio é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$, é tal que, para todo $a, b \in \mathbb{R}^*_+$, verifica-se a igualdade:

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

Nessas condições, $f(2) + f(\frac{1}{2})$ é igual a

(a) 0.

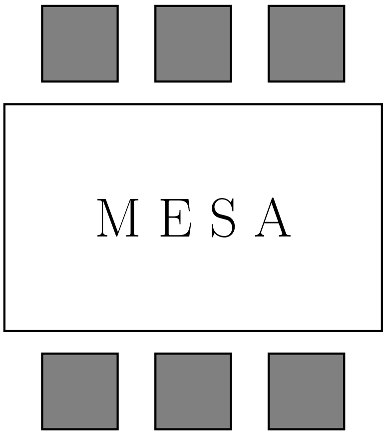
(b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) $\frac{5}{4}$.

(e) $\frac{3}{2}$.

30. Em cada ingresso vendido para um show de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema a seguir.




O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é

(a) 96.
(b) 120.
(c) 192.
(d) 384.
(e) 720.

31. Quando 5 funcionários trabalham simultaneamente numa repartição pública, cada um consegue atender, em média, 30 pessoas por dia. Assim, em um dia, são atendidas 150 pessoas no total. Aumentando-se o número de funcionários na repartição, o número médio de atendimentos cai, pois os funcionários passam a ter de dividir os recursos físicos (computadores, arquivos, mesas, etc), fazendo com que o tempo de cada atendimento aumente. Estima-se que, a cada funcionário adicional que passe a trabalhar na repartição, a média de atendimentos diários por funcionário caia 2 pessoas. De acordo com essa estimativa, o menor número de funcionários que deverão trabalhar simultaneamente na repartição para que o total de pessoas atendidas em um dia seja 192 é

(a) 6.
(b) 7.
(c) 8.
(d) 9.
(e) 10.

32. Em uma pirâmide quadrangular regular, a área lateral é o dobro da área da base. Nesse caso, cada face lateral forma com o plano da base um ângulo que mede

   (a) $15°$.
   (b) $30°$.
   (c) $45°$.
   (d) $60°$.
   (e) $75°$.

33. Considere um número complexo $z$, de módulo 10, tal que

$$z = (K + i)^2,$$

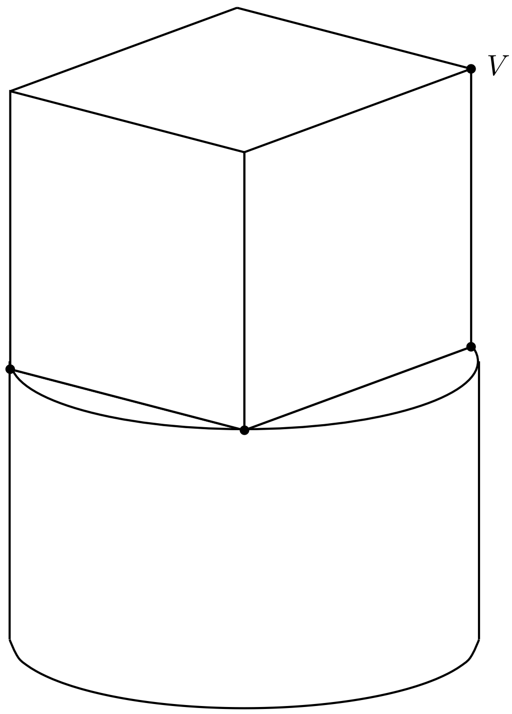
   em que $K$ é um número real. A parte real desse número complexo é igual a

   (a) $5\sqrt{3}$.
   (b) 8.
   (c) $5\sqrt{2}$.
   (d) 6.
   (e) 5.

34. Os trens de determinada linha passam numa determinada estação a cada 15 minutos, pontualmente. A probabilidade de que uma pessoa chegue à estação em um instante qualquer do dia e tenha de esperar mais de 10 minutos por um trem dessa linha é igual a

   (a) $\frac{1}{4}$.
   (b) $\frac{1}{3}$.
   (c) $\frac{1}{2}$.
   (d) $\frac{2}{3}$.
   (e) $\frac{3}{4}$.

35. Na figura a seguir, a base inferior do cubo de aresta $a$ está inscrita na base superior do cilindro circular reto de altura $a$.




A distância entre o vértice $V$ do cubo e o centro da base inferior do cilindro é igual a

(a) $\frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

(b) $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

(c) $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

(d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(e) $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.