RESPOSTAS ESPERADAS - MATEMÁTICA

QUESTÃO 13

a) Para a **Escola A**, o aumento percentual foi de $\frac{R\$ \, 1.150,00 - R\$ \, 1.000,00}{R\$ \, 1.000,00} \times 100\% = 0,15 \times 100\% = 15\%$. Para a **Escola B,** foi de $\frac{R\$ \, 1.320,00 - R\$ \, 1.200,00}{R\$ \, 1.200,00} \times 100\% = 0,10 \times 100\% = 10\%$. Para a **Escola C,** foi de $\frac{R\$ \, 1.680,00 - R\$ \, 1.500,00}{R\$ \, 1.500,00} \times 100\% = 0,12 \times 100\% = 12\%$. Portanto, foi a **Escola A** que teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.

b) A mensalidade para o primeiro filho é de $R\$ \, 1.320,00$. Para o segundo filho, a mensalidade é de $R\$ \, 1.320 - 0,1 \times R\$ \, 1.320,00 = R\$ \, 1.320,00 - R\$ \, 132,00 = R\$ \; 1.188,00$. Para o terceiro filho, a mensalidade é de $R\$ \, 1.320 - 0,2 \times R\$ \, 1.320,00 = R\$ \, 1.320,00 - R\$ \, 264,00 = R\$ \; 1.056,00$. Assim, o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018 será de $R\$ \, 1.320,00 + R\$ \, 1.188,00 + R\$ \, 1.056,00 = R\$ \, 3.564,00$.

QUESTÃO 14

a) Para $c = 1$ temos $f(x) = 2x + 1$. Logo, a equação $[f(x)]^3 = f(x^3)$ se torna $[2x + 1]^3 = 2x^3 + 1$. Desenvolvendo-a, obtemos $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 1$, ou seja, $6x^3 + 12x^2 + 6x = 0$. Temos então $6x(x^2 + 2x + 1) = 0$, ou ainda, $6x(x + 1)^2 = 0$. Portanto, as soluções são $x = 0$ ou $x = -1$.

b) Temos $g(x) = \log(xf(x) + c) = \log(x(2x + c) + c) = \log(2x^2 + cx + c)$. Para que a função g esteja definida para todo número real x, devemos ter $2x^2 + cx + c > 0$ para todo número real x. Como o gráfico da função quadrática $q(x) = 2x^2 + cx + c$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima, para que $q(x)$ seja sempre positiva, a equação $q(x) = 0$ não pode ter solução, ou seja, o discriminante deverá ser negativo.

Assim, $\Delta = c^2 - 4 \times 2 \times c = c^2 - 8c = c(c - 8) < 0$ implica que $0 < c < 8$.

QUESTÃO 15

a) Como (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica de razão w, temos $a_2 = a_1 \times w$ e $a_3 = a_2 \times w$. Como $a_3 = 3$ e $w = 2$, temos $a_2 = \frac{a_3}{w} = \frac{3}{2}$ e $a_1 = \frac{a_2}{w} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$. Como (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética de razão w, temos $a_3 = 3$, $a_4 = a_3 + w = 3 + 2 = 5$ e $a_5 = a_4 + w = 5 + 2 = 7$. Portanto, a sequência é $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7)$.

b) Como (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica de razão w, temos $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 \times w = w$ e $a_3 = a_2 \times w = w^2$. Como (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética de razão w, temos $a_3 = w^2$, $a_4 = a_3 + w = w^2 + w$ e $a_5 = a_4 + w = w^2 + 2w$. Logo, devemos ter $a_5 = w^2 + 2w = 8$, ou seja, $w^2 + 2w - 8 = 0$. As soluções dessa equação quadrática são dadas por $w = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3$, ou seja, $w = -4$ ou $w = 2$. Portanto, as sequências possíveis são $(1, -4, 16, 12, 8)$ ou $(1, 2, 4, 6, 8)$.

QUESTÃO 16

a) Decompondo o quadrilátero em três triângulos retângulos e um retângulo, a área do quadrilátero será dada por $\frac{2 \times 4}{2} + \frac{7 \times 1}{2} + \frac{1 \times 3}{2} + 7 \times 3 = 4 + \frac{7}{2} + \frac{3}{2} + 21 = 4 + 5 + 21 = 30$.

b) A reta que passa pelos pontos $B = (5,0)$ e $C = (4,3)$ tem coeficiente angular $m = \frac{0-3}{5-4} = -3$. Logo, a reta perpendicular a essa tem coeficiente angular $n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$. Portanto, a reta procurada passa pelo ponto $A = (-5,0)$ tem coeficiente angular $n = 1/3$ e sua equação é dada por $\frac{y-0}{x-(-5)} = \frac{1}{3}$, ou seja, $3y = x + 5$.

QUESTÃO 17

a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o e, portanto, $\theta + 2\theta + \beta = 3\theta + \beta = 180^o$. Se o triângulo for isósceles, então $\beta = \theta$ ou $\beta = 2\theta$. Assim, $4\theta = 180^o$ou $5\theta = 180^o$, ou seja, $\theta = 45^o$ ou $\theta = 36^o$.

b) Pela Lei dos Senos, temos $\frac{\operatorname{sen}\theta}{a} = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{b}$. Considerando o fato de que $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ e $c = 2a$, temos $\cos\theta = \frac{b}{c}$. Aplicando a Lei dos Cossenos ao lado de comprimento a, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\theta$, obtemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \frac{b}{c} = b^2 + c^2 - 2b^2 = c^2 - b^2$, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$. Logo, o triângulo é retângulo com hipotenusa de comprimento c e, portanto, $\beta = 90^o$.

QUESTÃO 18

a) Efetuando o produto, $B^T AB =$

$$\begin{pmatrix} p & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q & qp & p+q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix} = (p+q)p + (p+q)q = (p+q)(p+q) = (p+q)^2.$$

Como $p + q$ é um número real, $(p+q)^2 \geq 0$. Portanto, $B^T AB \geq 0$ para quaisquer números reais p e q.

b) Para que esse sistema tenha infinitas soluções é necessário que a matriz A seja singular, ou seja, tenha determinante nulo. O determinante de A é dado por $\det(A) = 1 \times 2 \times 1 + 0 \times p \times 1 + 1 \times p \times 1 - 1 \times 2 \times 1 - 0 \times 1 \times 1 - 1 \times p \times p = 2 + 0 + p - 2 - 0 - p^2 = p(p-1)$. Logo, devemos ter $p = 0$ ou $p = 1$. Para $p = 0$ temos o sistema linear,

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ x + 2y = 0, \\ x + z = q. \end{cases}$$

Observando a primeira e terceira linhas, para que esse sistema admita solução devemos ter $q = 0$. Para $p = 1$ temos o sistema linear,

$$\begin{cases} x + z = 1, \\ x + 2y + z = 0, \\ x + y + z = q. \end{cases}$$

Da primeira linha, temos $z = 1 - x$. Substituindo essa relação na segunda e terceira linhas, obtemos as equações $2y + 1 = 0$ e $y + 1 = q$. Para que essas equações sejam consistentes, devemos ter $q = \frac{1}{2}$. Concluindo, para que o sistema tenha infinitas soluções devemos ter $p = q = 0$ ou $p = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.