

1

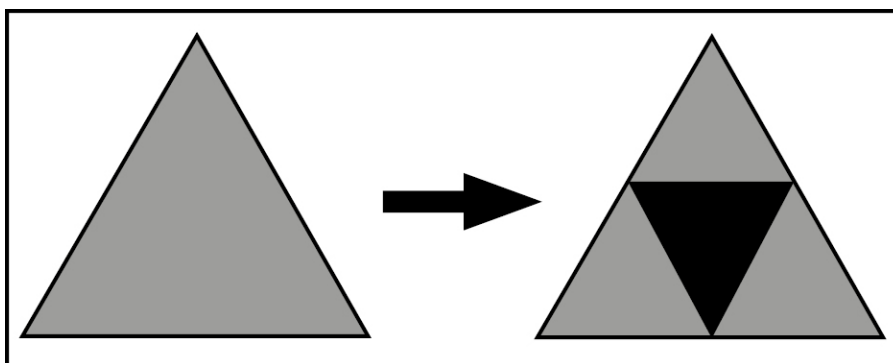
- A** Demonstre que, se escolhermos três números inteiros positivos quaisquer, sempre existirão dois deles cuja diferença é um número múltiplo de 2.
- B** Considere um triângulo equilátero de área $\sqrt{3}\text{cm}^2$. Demonstre que, se tomarmos 5 pontos no interior do triângulo, sempre ocorrerá que ao menos dois desses pontos estarão a uma distância entre eles menor que 1cm.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

- A** Se escolhermos três ímpares, qualquer par de números tem como diferença um número par, e portanto múltiplo de 2: $2k-1-(2l-1)=2(k-l)$.
 Se escolhermos dois ímpares e um par, a diferença entre os dois ímpares é um número par, múltiplo de 2.
 Se escolhermos um ímpar e dois pares, a diferença entre os dois pares é um número par, também múltiplo de 2: $2k-2l=2(k-l)$.
 Se escolhermos três pares, a diferença de quaisquer dois deles é um número par, múltiplo de 2.

- B** O lado do triângulo equilátero mede 2 cm. Cada par de pontos no interior estará a uma distância entre eles menor que o comprimento do lado, ou seja, menor que 2 cm.

Tomamos os pontos médios dos lados e os unimos formando quatro triângulos equiláteros de lado 1 cm.



Considerando os cinco pontos e os quatro triângulos equiláteros de lado 1 cm, está claro que ao menos dois pontos cairão no interior de um mesmo triângulo equilátero de lado 1 cm (ou em um de seus lados), e, portanto, estarão a uma distância menor que 1 cm. É fácil ver que se algum dos pontos cai em um dos lados do triângulo central, a distância entre ele e um outro ponto também será menor que 1 cm.

NOTA

2

A Demonstre que a média aritmética de todos os inteiros de 300 a 600, inclusive 300 e 600, é múltiplo da média aritmética de todos os inteiros de 50 a 100, inclusive 50 e 100.

B O valor de $\frac{2^{-10} + 2^{-11} + 2^{-12} + 2^{-13}}{0,5}$ é quantas vezes o valor de 2^{-13} ?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A A média aritmética de todos os inteiros de 300 a 600, inclusive 300 e 600, é 450.

A média aritmética de todos os inteiros de 50 a 100, inclusive 50 e 100, é 75.

Como $450 = 6 \cdot 75$, 450 é múltiplo de 75.

$$\mathbf{B} \quad x \cdot 2^{-13} = \frac{2^{-10} + 2^{-11} + 2^{-12} + 2^{-13}}{0,5} = \frac{2^{-13} (2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0)}{0,5}$$

$$x = \frac{8 + 4 + 2 + 1}{0,5} = 30; \text{ 30 vezes.}$$

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

3 A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é tal que $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ para todo número natural $n \geq 3$. Além disso, são conhecidos os termos $a_3 = 4$ e $a_5 = 8$.

A Qual é o valor de a_6 ?

B Qual é a soma dos cinco primeiros termos da sequência?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

$$\text{A } a_5 = \frac{a_4 + a_3}{2} \rightarrow 16 = a_4 + 4 \rightarrow a_4 = 12$$

$$a_6 = \frac{a_5 + a_4}{2} = 10.$$

$$\text{B } a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} \rightarrow a_2 = 20$$

$$a_3 = \frac{a_2 + a_1}{2} \rightarrow a_1 = -12$$

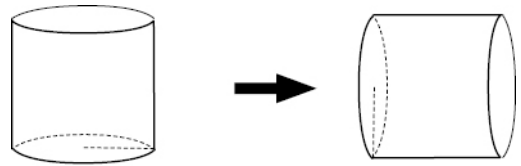
A soma dos cinco primeiros termos é igual a: $(-12) + 20 + 4 + 12 + 8 = 32$.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

4

A Um tanque cilíndrico fechado contém 54π m³ de água e está cheio somente até metade da sua capacidade. Quando o tanque é colocado no chão, apoiado na sua base circular, a altura da água no tanque é igual a 6m. Quando o tanque é colocado no chão, apoiado no seu lado, qual é a altura, em metros, da superfície da água acima do chão?



B Usando massa de modelar, uma garota molda três esferas de raios, 1 cm, 2 cm e 4 cm. Em seguida, ela mistura as 3 esferas para construir uma única esfera. Qual é o raio dessa última esfera?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Como o cilindro está metade cheio, ele estará completo até metade da sua altura, de pé ou apoiado no seu lado. Quando o cilindro está apoiado no seu lado, a altura do nível da água acima do chão é igual ao raio do cilindro. Portanto:

$$V = \pi r^2 h$$

$$54\pi = \pi r^2 \cdot 6$$

$$r^2 = 9 \rightarrow r = 3 \text{ m}$$

A altura do nível da água acima do chão é igual a 3 m.

B Como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, o volume das três esferas combinadas é igual a:

$$\frac{4}{3}\pi (1^3 + 2^3 + 4^3) = \frac{4}{3}\pi (73)$$

Se r representa o raio da nova esfera, temos que:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (73)$$

$$r = \sqrt[3]{73} \text{ cm.}$$

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

5

A Se a receita de certa livraria, em janeiro, é $\frac{1}{10}$ da sua receita em fevereiro e sua receita, em março, é o quádruplo da sua receita em janeiro, então a receita da loja, em fevereiro, é quantas vezes a média aritmética das receitas de janeiro e março?

B No texto a seguir, considere a divisão no conjunto dos números inteiros positivos, ou seja, o dividendo, o divisor, o quociente e o resto são inteiros positivos.

Se m e n são dois inteiros positivos tais que $\frac{m}{n} = 60,15$, qual, dentre os números 1, 2 e 3, poderia ser o resto quando dividimos m por n ?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Considere as receitas:

$$\text{Janeiro: } \frac{1}{10}x$$

$$\text{Fevereiro: } x$$

$$\text{Março: } 4\left(\frac{1}{10}x\right) = \frac{2}{5}x$$

A média aritmética das receitas de janeiro e março é igual a:

$$\frac{\frac{1}{10}x + \frac{2}{5}x}{2} = \frac{\frac{5}{10}x}{2} = \frac{1}{4}x$$

A receita da loja em fevereiro é 4 vezes a média aritmética das receitas de janeiro e março.

B Observe que: $m = 60n + 0,15n$.

O divisor é n , o quociente 60 e o resto, $0,15n$.

Veja:

$$0,15n = 1 \rightarrow n = 6,666\dots$$

$$0,15n = 2 \rightarrow n = 13,333\dots$$

$$0,15n = 3 \rightarrow n = 20$$

O número é 3.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

6 Que relações deverão existir entre os números reais m, n, l e k para que os sistemas de equações

$$\begin{cases} x-y+2z=m \\ x+2y-z=n \end{cases} \begin{cases} x-y+2z=m \\ x+2y-z=n \\ 2x+y+z=l \end{cases} \begin{cases} x-y+2z=m \\ x+2y-z=n \\ x-4y+5z=k \end{cases}$$

sejam equivalentes, isto é, sejam possíveis e tenham as mesmas soluções?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Mediante operações elementares com linhas e colunas, transformamos o sistema de equações no sistema de equações equivalentes expresso na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & : & m \\ 0 & 3 & -3 & : & -m+n \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & : & m \\ 0 & 3 & -3 & : & -m+n \\ 0 & 3 & -3 & : & -2m+l \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & : & m \\ 0 & 3 & -3 & : & -m+n \\ 0 & 3 & -3 & : & m-k \end{pmatrix}$$

As relações pedidas são: $-m+n=-2m+l$ e $-m+n=m-k$, ou de um modo mais simplificado: $m+n=l$ e $2m-n=k$.

NOTA

7

A Se n é um inteiro positivo e o produto de todos os inteiros de 1 a n , inclusive 1 e n , é divisível por 660, qual é o menor valor possível de n ?

B Sabendo que $\frac{x+y}{z} > 0$, $x < y$ e $z < 0$, é correto afirmar que $x < 0$? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Seja N o produto de todos os inteiros de 1 a n . Como N é divisível por 660, todo fator primo de 660 é um fator de N . Assim: $660 = 1 \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$.
O menor valor possível de N é: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times 11$ e o menor valor possível de n é 11.

B Como $z < 0$, temos que $x + y < 0$, ou seja, $x < -y$. Mas é dado que $x < y$.

Somando as duas inequações membro a membro, temos:

$$x + x < -y + y$$

$$2x < 0$$

$$x < 0$$

A afirmação é verdadeira.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

8

A Cada uma das letras na tabela ao lado representa um dos números 1, 2 ou 3. Cada um desses números aparece exatamente uma vez em cada linha e exatamente uma vez em cada coluna. Se $n+t=6$, qual é o valor de x ?

x	y	z
m	n	p
r	s	t

B Leia e interprete com atenção o texto de lógica a seguir. Em seguida, escreva a resposta da questão. Não há necessidade de nenhuma justificativa.

João e Maria vagavam pela floresta procurando o caminho de casa. Em uma encruzilhada, encontram o guarda do ogro: um caminho levava para casa, o outro para a mesa do ogro e não como convidado! Por ordem do ogro, cada viajante podia fazer uma única pergunta ao guarda. E eles sabiam que o guarda mentia e dizia a verdade alternadamente. Se dizia a verdade uma vez, na vez seguinte mentia; se mentia uma vez, na vez seguinte dizia a verdade. João e Maria foram até o guarda, um de cada vez. João foi o primeiro. Maria ouviu João perguntar qual é o caminho que leva para casa, mas não ouviu a resposta do guarda, nem viu o caminho que João seguiu.

Questão: Que pergunta Maria formulou ao guarda para ter certeza de escolher o caminho correto que leva para casa?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Como $n+t=6$, então $n=t=3$, pois nenhuma outra soma de dois valores é igual a 6. Como cada número aparece somente uma vez em cada linha ou coluna, o valor de x também é igual a 3.

B Resposta: "Que direção você indicou a João?"

NOTA

9

A Em um grupo de 5 000 pessoas, 40% investem em poupança, 20% investem em renda fixa e 8% investem em ambas, poupança e renda fixa. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente do grupo de 5 000 pessoas, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, da pessoa escolhida ser uma que investe em poupança mas não em renda fixa?

B Um time de futebol formou uma comissão de 10 membros, incluindo Hélio, para escolher um presidente, um diretor de futebol e um diretor de patrimônio. Uma pessoa da comissão vai ser escolhida ao acaso, por sorteio, para ser o presidente, uma das nove restantes vai ser escolhida ao acaso para ser o diretor de futebol, e uma das oito restantes vai ser escolhida ao acaso para ser o diretor de patrimônio. Qual é a probabilidade de Hélio ser o membro escolhido para ser diretor de futebol ou o membro escolhido para ser o diretor de patrimônio?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A $0,40 \cdot 5\,000 = 2\,000$ pessoas investem em poupança.

$0,08 \cdot 5\,000 = 400$ pessoas investem em poupança e renda fixa.

$2\,000 - 400 = 1\,600$ pessoas investem em poupança mas não investem em renda fixa.

A probabilidade pedida é: $\frac{1600}{5000} = \frac{16}{50} = \frac{32}{100} = 32\%$.

B A probabilidade pedida no enunciado é igual a: $\frac{2 \cdot 9 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{5}$.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

- 10 Uma construtora vende três apartamentos cuja média aritmética dos preços é igual a R\$ 170 000,00. Considerando os três preços, existe uma única moda que não é o preço maior. O preço maior excede em R\$ 30 000,00 a soma dos preços dos outros dois apartamentos. Determine a moda e a mediana dos preços dos três apartamentos.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Os preços dos três apartamentos são x , y e z .

$$\text{Temos que: } \frac{x+y+z}{3} = 170000 \rightarrow x+y+z = 510000 .$$

$$\text{Se o preço maior é } z, \text{ então: } z - 2x = 30000 \quad z = 2x + 30000$$

Mas $x = y$ pois os preços têm uma única moda que não é igual ao preço maior z .

$$\text{Portanto: } x + x + 2x + 30000 = 510000 \rightarrow x = 120000 .$$

Os preços dos três apartamentos são:

R\$ 120 000,00; R\$ 120 000,00 e R\$ 240 000,00.

A moda e a mediana são iguais a R\$ 120 000,00.

NOTA
