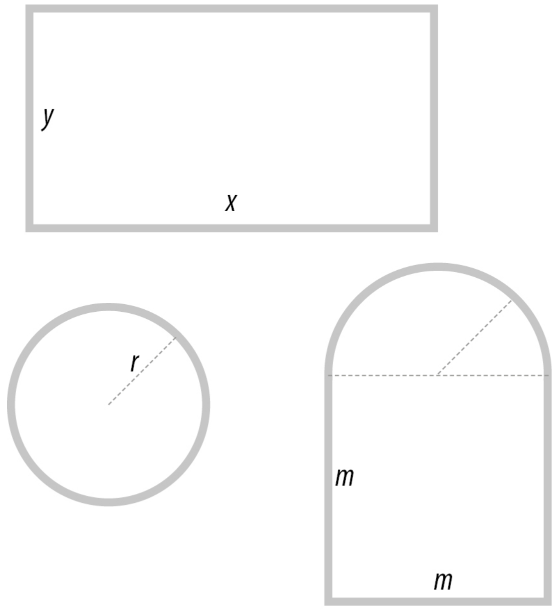
MATEMÁTICA APLICADA

1 Para a construção de uma janela na sala de um teatro, existe a dúvida se ela deve ter a forma de um retângulo, de um círculo ou então da figura formada pela união de um quadrado com um semicírculo na sua parte superior. Determine a forma da janela de maior superfície, para que a luminosidade seja máxima, se seu perímetro, em qualquer caso, for igual a 24 metros. Aproxime o valor de π ao número inteiro mais próximo para obter as áreas.



RESOLUÇÃO

1. Forma de um retângulo: Área = x. (12 – x) = - x^2 + 12x

A área é máxima para $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-1)} = 6$; x = 6 metros.

A área é igual a $6^2 = 36$ m^2.

2. Forma de um círculo: $$\begin{gathered} 2\pi r = 24 \\ r = \frac{24}{2.3} = 4 \end{gathered}$$

A área é igual a $\pi r^2 = 3.4^2 = 48$, ou seja, 48 m^2.

3. Forma combinada de um quadrado mais meio círculo: $$\begin{gathered} 3x + \frac{1}{2}.2\pi.\frac{x}{2} = 24 \\ x = \frac{24}{4,5} \cong 5,3 \end{gathered}$$

A área é igual a: $x^2 + \frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2 = x^2(1+\frac{3}{8})$

Note que $x^2 = (5,3)^2 = 28,09$, aproximadamente 28 m^2

A área é aproximadamente igual a: , ou seja, 38,64 m^2.

A janela de área máxima se obtém com a forma circular.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

2

A Considere três números inteiros e positivos x, y e z. Se $\sqrt{x} = z$ e $y = (z-1)^2$, é certo afirmar que a diferença $x - y$ é um número ímpar? Justifique sua resposta.

B Se n é um número inteiro e positivo, $a = 2^{n+1}$ e $b = 3^{n+1}$, podemos afirmar que o valor de $b - a$ é maior que o dobro do valor de $3^n - 2^n$? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO

A Temos que $y = z^2 - 2z + 1$ e $x = z^2$.

Se tomamos as duas informações juntas, chegamos à conclusão:
a diferença, $x - y = z^2 - (z^2 - 2z + 1) = 2z - 1$, é um número inteiro ímpar para todo valor inteiro de z.

B $b - a = 3.3^n - 2.2^n = 2.3^n - 2.2^n + 1.3^n = 2(3^n - 2^n) + 3^n$

Está correta a afirmação, pois 3^n é um número positivo qualquer que seja o valor de n.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

3

A Suponha que existem polvos coloridos e que eles têm 6, 7 ou 8 tentáculos. É sabido que polvos com sete tentáculos sempre mentem, enquanto que aqueles com seis tentáculos e os com oito tentáculos sempre dizem a verdade. Uma noite, quatro polvos coloridos se encontraram e disseram as seguintes frases:

Preto – "Nós todos juntos temos 28 tentáculos".
Verde - "Nós todos juntos temos 27 tentáculos".
Amarelo - "Nós todos juntos temos 26 tentáculos".
Vermelho - "Nós todos juntos temos 25 tentáculos".

Descubra qual é o único polvo que está dizendo a verdade e quantos tentáculos ele tem, justificando sua resposta com um pequeno texto.

B Um cadeado tem um código de três algarismos com algumas restrições. O primeiro algarismo não pode ser 0, nem 1. O segundo algarismo tem de ser 0 ou 1. O segundo e terceiro algarismos não podem ser ambos 0 no mesmo código. Quantos códigos diferentes são possíveis para esse tipo de cadeado?

RESOLUÇÃO

A Um polvo diz a verdade e os outros três mentem. Então, as possíveis respostas são: $3 \times 7 + 6 = 27$ ou $3 \times 7 + 8 = 29$
O polvo verde está dizendo a verdade e ele tem 6 tentáculos.

B As possíveis combinações de códigos são:

1) $\boxed{8}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{\boxed{1}}$ $\boxed{9} \rightarrow 8 \cdot 1 \cdot 9 = 72$

2) $\boxed{8}$ $\underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\boxed{1}}$ $\boxed{10} \rightarrow 8 \cdot 1 \cdot 10 = 80$

Para esse tipo de cadeado, são 152 códigos diferentes.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

4 A receita obtida na venda de x unidades de certo tipo de produto é igual a $x.y$, em que y é o preço de cada unidade. Uma lanchonete em um estádio de futebol vende um tipo especial de sanduíche nos dias de jogos. A receita $R(x)$ obtida na venda de x sanduíches pode ser expressa pela função $R(x)=-0{,}001x^2+20x$ reais. O proprietário da lanchonete aluga vários quiosques por um total de R$ 2 500,00 em um dia de jogo. Além disso, ele gasta em média R$ 6,00 para fazer um sanduíche.

A A que preço deve vender cada sanduíche para obter o maior lucro possível num dia de jogo?

B Um aumento no preço dos produtos alimentícios elevou em 50% o custo para o proprietário fazer cada sanduíche. Ele deve repassar todo esse aumento no preço de cada sanduíche para os torcedores? Considere que antes do aumento no custo de cada sanduíche, o preço unitário praticado era o preço do item A.

Se sua resposta for "Sim", justifique-a do modo que julgar mais conveniente.

Se sua resposta for "Não", indique o valor pelo qual ele deve vender cada sanduíche para obter o maior lucro possível nessas novas condições.

RESOLUÇÃO

A

$$L(x)=-0{,}001x^2+20x-(2500+6x)=-0{,}001x^2+14x-2500$$
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-14}{2(-0{,}001)}=7000$$

Para maximizar o seu lucro ele deve vender 7000 sanduíches. A receita na venda de 7000 sanduíches é igual a:

$x(-0{,}001x+20)=7000(-0{,}001.7000+20)=7000.13=91000$ reais.

Observando a receita, ele deve vender cada sanduíche a R$ 13,00, ou seja: $\frac{91000}{7000}=13$; R$ 13,00.

B O novo custo é igual a $2500+6x+50\%.6x=2500+9x$.

A nova função lucro é
$$L(x)=-0{,}001x^2+20x-(2500+9x)=-0{,}001x^2+11x-2500$$
$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-11}{2(-0{,}001)}=5500$$
.

Para maximizar o seu lucro ele deve vender 5 500 sanduíches. A receita na venda de 5 500 sanduíches é igual a:

$x(-0{,}001x^2+20x)=5500(-0{,}001.5500+20)=5500.14{,}50=79750$ reais.

Observando a receita, ele deve vender cada sanduíche a R$ 14,50. Ou seja, ele não deve repassar todo esse aumento de 50%. R$ 13,00 = R$ 6,50.
Nessas condições, ele obtém o maior lucro possível vendendo cada sanduíche por R$ 14, 50 e, não, R$ 19,50.

NOTA

5 Pablo, Ana e Marta foram a um *shopping* em sua cidade.

- Pablo comprou 1 agenda, 1 livro e 1 CD e disse que gastou R$ 75,00.
- Ana comprou 3 agendas, 1 livro e 2 CDs e disse que gastou R$ 150,00.
- Já Marta disse que gastou R$ 400,00, comprando 5 agendas, 3 livros e 4 Cds.

Sabe-se que cada agenda custava *x* reais, cada livro, *y* reais e cada CD, *z* reais.

A Demonstre que pelo menos um deles mentiu.

B Se Marta tiver sido a única que mentiu, demonstre que o preço de venda de cada agenda era igual ao de cada livro.

RESOLUÇÃO

A Temos de resolver o sistema de equações lineares: $\begin{cases} x+y+z=75 \\ 3x+y+2z=150 \\ 5x+3y+4z=400 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 3 & 1 & 2 & 150 \\ 5 & 3 & 4 & 400 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 0 & -2 & -1 & -75 \\ 0 & -2 & -1 & 25 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 0 & -2 & -1 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{array}\right)$$

A terceira linha: $0x+0y+0z=100$, mostra que as equações são incompatíveis, ou seja, o sistema é impossível. Pelo menos um deles mentiu.

B Se Marta mentiu, resolvemos o seguinte sistema de duas equações lineares: $\begin{cases} x+y+z=75 \\ -2y-z=-75 \end{cases}$

Adicionando membro a membro as duas equações, temos: $\begin{array}{l} x-y+0=0 \\ x=y \end{array}$

O preço de venda de cada agenda é igual ao preço de venda de cada livro.

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

6 Seja um triângulo de vértices A (4, a), B (4, b) e C (5, c). Sabe-se que a soma das três ordenadas é 24, que a ordenada b é a média aritmética das outras duas e que b e c são números pares consecutivos, com b < c.

A Calcule a área do triângulo ABC.

B Calcule os valores de sen $\widehat{A}$ e cos $\widehat{C}$.

RESOLUÇÃO

A Resolvendo o sistema de equações lineares: $\begin{array}{l} a+b+c=24 \\ 2b=a+c \\ c=b+2 \end{array}$ obtemos a solução: $a=6, b=8, c=10$.

A área do triângulo ABC é igual a: $\dfrac{2.1}{2}=1$

B

$$S=\frac{1}{2}.AB.AC.sen\widehat{A} \qquad AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.cos\widehat{C}$$

$$1=\frac{1}{2}.2.\sqrt{17}.sen\widehat{A} \qquad 2^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{17})^2-2.\sqrt{5}.\sqrt{17}.cos\widehat{C}$$

$$sen\widehat{A}=\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad cos\widehat{C}=\frac{9}{\sqrt{85}}$$

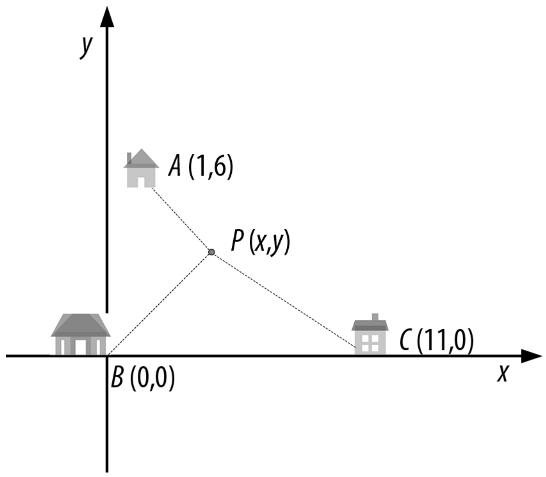
NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

7 Um funcionário do setor de produção da Editora Fauna do Pantanal Mato-Grossense verifica que as lojas das três livrarias que são os clientes mais importantes da editora estão localizadas nos pontos A (1, 6), B (0, 0) e C (11, 0), em que as unidades do plano cartesiano estão expressas em quilômetros.

A Em que ponto P(x, y) deve ser instalado um armazém para distribuição dos livros de modo que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P de distribuição dos livros aos pontos A, B e C de localização das livrarias seja a menor possível? Sabe-se que a razão das coordenadas do ponto P: $\frac{x}{y}$ é igual a 2.

B É correto afirmar que o ponto P é o baricentro do triângulo ABC?



RESOLUÇÃO

A $d^2 = (x-1)^2 + (y-6)^2 + x^2 + y^2 + (x-11)^2 + y^2$

Temos que: $\frac{x}{y} = 2$, ou seja, $x = 2y$.

$f(y) = d^2 = (2y-1)^2 + (y-6)^2 + (2y)^2 + y^2 + (2y-11)^2 + y^2$

$f(y) = 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 12y + 36 + 4y^2 + y^2 + 4y^2 - 44y + 121 + y^2$

$f(y) = 15y^2 - 60y + 158$

A função tem um mínimo para: $y = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-60)}{2(15)} = 2$.

Como $x = 2y$, temos $x = 2(2) = 4$

O armazém deve ser instalado no ponto $P(4,2)$.

B O baricentro do triângulo ABC é dado pela fórmula: $G(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3})$.

Portanto: $G(\frac{1+0+11}{3}, \frac{6+0+0}{3}) = G(4,2)$.

NOTA

8

A Podemos afirmar que 4^x é menor que 3 600, sabendo que $4^{x+1} > 4000$? Justifique sua resposta.

B Podemos afirmar que 4^x é menor que 3 600, sabendo que $4^{x-1} = 4^x - 400$? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO

A Não. Se $4^x.4^1 > 4000$ então $4^x > 1000$ e, 4^x ,pode ser maior que 3 600.

B Sim, pois temos que:

$$4^x - \frac{4^x}{4} = 4^x.\frac{3}{4} = 400$$

$$4^x = \frac{1600}{3} = 53\ ,33\ ...$$

$$4^x < 3600$$

NOTA

MATEMÁTICA APLICADA

9

A O logaritmo neperiano ou natural, de um número positivo x, é assim representado: ln$x$, significa simplesmente este logaritmo: $\log_e x$, em que a base é o número de Euler: $e = 2{,}718...$ Um fabricante de brinquedos observou que a porcentagem de barcos que afundam em menos de t dias após sua fabricação é estimada pela função $f(t) = 1 - e^{-0{,}04t}$. Que porcentagem de barcos continua a flutuar no 10º dia? Se necessário, use a aproximação: $\sqrt[5]{e^{-2}} = 0{,}67$.

B Quando a base é o número 10, os logaritmos se chamam decimais e a notação é simplesmente log sem escrever a base 10: $\log_{10} x = \log x$. O diretor de uma editora estima que, se x exemplares de um novo livro de Matemática para o Ensino Médio forem entregues aos professores para análise, as vendas do livro, no primeiro ano, serão de aproximadamente $f(x) = 1000.(15 - 20.10^{-0{,}003x})$ exemplares. Quantos exemplares a editora deverá distribuir para análise, para vender cerca de 10 000 exemplares no primeiro ano? Se necessário, use a aproximação: $\log 5 = 0{,}70$.

RESOLUÇÃO

A $f(10) = 1 - e^{-0{,}4} = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$

A porcentagem de barcos que continue a flutuar no 10º dia é $1 - 0{,}33 = 0{,}67 = 67\%$.

B

$$10\,000 = 1000\left(15 - 20 \cdot 10^{-0{,}003x}\right)$$
$$10 = 15 - 20 \cdot 10^{-0{,}003x}$$
$$\frac{1}{4} = 10^{-0{,}003x}$$
$$-2\left(log 10 - log 5\right) = log 10^{-0{,}003x}$$
$$-0{,}6 = -0{,}003x$$
$$x = 200$$

A editora deverá distribuir cerca de 200 exemplares para análise.

NOTA

10

A Uma urna contém bolas brancas, azuis e vermelhas. Há 24 bolas na urna, das quais 8 são brancas, e sabemos que a probabilidade de que uma bola selecionada ao acaso seja azul é 0,5. Se uma bola é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de que a bola seja vermelha?

B *Tickets* são numerados consecutivamente de 101 a 360 e colocados em uma caixa. Qual é a probabilidade de um *ticket* selecionado ao acaso ter um número com o dígito 2 na casa da ordem das centenas?

RESOLUÇÃO

A $\text{P (branca)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$\text{P (azul)} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

$\text{P (vermelha)} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

B $\text{P (2)} = \frac{100}{260} = \frac{5}{13}$

NOTA