MATEMÁTICA APLICADA

1 Os proprietários de um prédio com três apartamentos decidem comprar o edifício. Cada um dos três proprietários vai pagar uma quantia proporcional ao tamanho de seu apartamento.

O maior deles, no 1º andar, tem uma superfície total de 95 m^2. Os outros dois, no segundo e terceiro andar, têm superfície total de 85 m^2 e 70 m^2, respectivamente. O preço de venda do edifício é de R$ 300 000,00.

A Quanto deverá pagar o proprietário do apartamento do 2º andar?

B Se o preço total do edifício se reduzisse cerca de 10%, é correto afirmar que cada um dos proprietários pagaria cerca de 10% a menos? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Sejam a, b e c as quantias que devem pagar os proprietários dos apartamentos do 1º, 2º e 3º andar. Temos:

$$\frac{a}{95}=\frac{b}{85}=\frac{c}{70}=\frac{a+b+c}{250}=\frac{300\,000}{250}=1\,200$$

$$\frac{b}{85}=1\,200 \rightarrow b=102\,000\,;$$

R$ 102 000,00

B $$\frac{a+b+c}{250}=\frac{300\,000-10\%\left(300\,000\right)}{250}=\frac{270\,000}{250}=1080$$

$$\frac{b}{85}=1080 \rightarrow b=91\,800\,;$$

R$ 91 800,00

$$102\,000-10\%\left(102\,000\right)=91\,800\,;$$

R$ 91 800,00

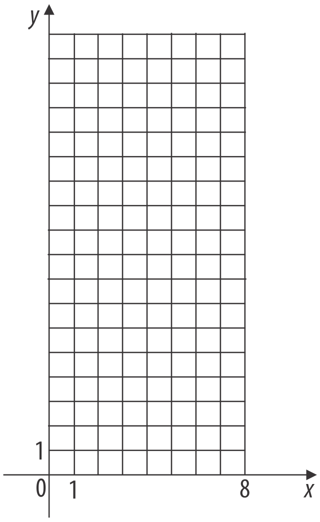
Usando o mesmo raciocínio para os valores do 1º e 3º andar, chegamos à conclusão que é correta a afirmação.

MATEMÁTICA APLICADA

2 Certo supermercado tem uma oferta em que se compram 3 caixas de litros de leite e são pagas somente 2. Um litro de leite custa R$ 3,00.

A Expresse as três equações da função que relaciona o número de caixas de leite *x* e o preço *y*, considerando os intervalos $0 \le x \le 2$, $3 \le x \le 5$ *e* $6 \le x \le 8$.

B Represente graficamente essa função.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A $x \rightarrow$ número de caixas de leite

$y \rightarrow$ preço a pagar

$x = 0 \rightarrow y = 0.3 = 0$

$x = 1 \rightarrow y = 1.3 = 3$

$x = 2 \rightarrow y = 2.3 = 6$ $\qquad y = 3.x$

$x = 3 \rightarrow y = (3-1).3 = 6$

$x = 4 \rightarrow y = (4-1).3 = 9$

$x = 5 \rightarrow y = (5-1).3 = 12$ $\qquad y = 3.(x-1)$

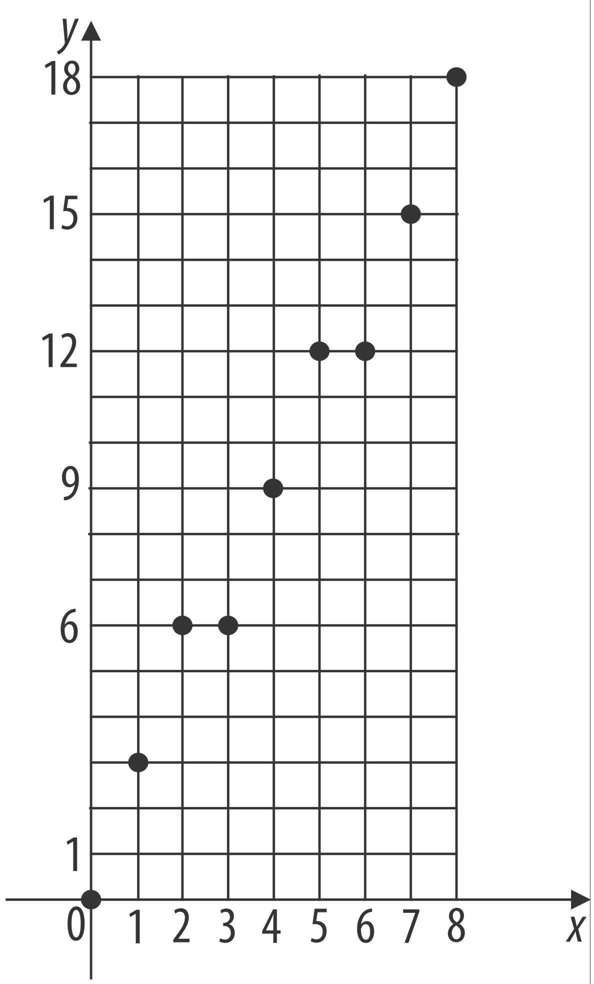
$x = 6 \rightarrow y = (6-2).3 = 12$

$x = 7 \rightarrow y = (7-2).3 = 15$

$x = 8 \rightarrow y = (8-2).3 = 18$ $\qquad y = 3.(x-2)$

...

B



MATEMÁTICA APLICADA

3 Seja uma função $f(x)$ para a qual $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$, para todo x diferente de 0 e 1. Qual é o valor de $f(2)$?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

- Substituímos na equação: $x=2 \rightarrow f(2)+f(-1)=2$
- Substituímos na equação: $x=-1 \rightarrow f(-1)+f(0,5)=-1$
- Simplificamos as duas igualdades: $f(2)-f(0,5)=3$
- Substituímos na equação: $x=0,5 \rightarrow f(0,5)+f(2)=0,5$
- Com as duas igualdades: $f(2)-f(0,5)=3$ e $f(0,5)+f(2)=0,5$
  obtemos o valor de $f(2)$.

$$2f(2)=3,5 \rightarrow f(2)=1,75$$

4 Demonstre a seguinte igualdade.

$$\sum_{n=1}^{99} \log\sqrt{\frac{1+n}{n}} = 1$$

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{2}.\log\left(\frac{1+n}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\log 2+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\ldots+\log\frac{99}{98}+\log\frac{100}{99}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log 100\right)=\frac{1}{2}.2=1$$

MATEMÁTICA APLICADA

5 Um número expresso em notação científica é da forma $a.10^n$ em que a pertence ao intervalo [1,10) e n é um número inteiro. Escreva o número 5^{500} em notação científica. Use as aproximações: log2=0,301 e $\sqrt{10}=3,162$

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

$$x=5^{500}\rightarrow \log x=500\left(\log 10-\log 2\right)=500\left(0,699\right)=349,5$$
$$x=10^{349,5}=10^{349}.10^{0,5}=10^{349}.\sqrt{10}=3,162.10^{349}$$

6

A Considere um número inteiro e positivo p, sendo $p<50$. Considere a seguinte afirmação:

Se p é um número primo e a é qualquer número inteiro e positivo e menor que p , então $a^{p-1}-1$ será divisível por p.
Verifique essa afirmação nos casos particulares em que $p=5$ e $p=2$.

B Se $y=\dfrac{x}{x+\dfrac{x}{x+y}}$, determine todos os valores de x, diferentes de 0 e inteiros, para os quais y não é um número real.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A

$a=4\rightarrow 4^{5-1}-1=255\rightarrow 255:5=51$

$a=3\rightarrow 3^{5-1}-1=80\rightarrow 80:5=16$

$a=2\rightarrow 2^{5-1}-1=15\rightarrow 15:5=3$

$a=1\rightarrow 1^{5-1}-1=0\rightarrow 0:5=0$

$\rightarrow$ No caso em que p = 5.

$a=1\rightarrow 1^{2-1}-1=0\;\; e\;\; 0:2=0$ $\rightarrow$ No caso em que p = 2.

B

$$y=\frac{x}{x+\frac{x}{x+y}}=\frac{x(x+y)}{x^2+xy+x}=\frac{x+y}{x+y+1}$$

$$yx+y^2+y-x-y=0$$

$$y^2+yx-x=0$$

$$\Delta=x^2+4x$$

$$x^2+4x<0\rightarrow -4<x<0$$

Os valores inteiros de x são -3, -2, -1.

7 Determine os dois valores de x, em graus e inteiros, mais próximos de $2011°$, um menor que $2011°$ e o outro maior que $2011°$, que satisfazem a equação:

$$2^{\text{sen}^2 x}+2^{\cos^2 x}=2\sqrt{2}$$

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

$$2^{sen^2 x}+2^{\cos^2 x}=2\sqrt{2}$$

$$2^{sen^2 x}+2^{1-sen^2 x}=2\sqrt{2}\rightarrow 2^{sen^2 x}+\frac{2}{2^{sen^2 x}}=2\sqrt{2}$$

$$2^{sen^2 x}=y$$

$$y+\frac{2}{y}=2\sqrt{2}\rightarrow y^2-2\sqrt{2}y+2=0\rightarrow y=\sqrt{2}$$

$$2^{sen^2 x}=2^{0,5}\rightarrow sen^2 x=0,5\rightarrow sen\, x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x=45°+k.90°;k$ inteiro.

Por substituição e tentativa, obtemos os dois valores de x: 1935º e 2025°.

8

A Utilizando somente números inteiros positivos, quantas adições distintas, sem levar em conta a ordem das parcelas, dão como resultado 5? Conte adições, como por exemplo, 2+3 e 3+2 uma única vez.

B De cada 10 partidas de futebol que jogam as equipes A e B, A ganha 6, empata 3 e perde 1. Considerando que os resultados das partidas são eventos independentes e que as duas equipes disputam um torneio entre si de 3 partidas, calcule a probabilidade de que:

I A equipe A vença as 3 partidas.

II A equipe A vença 2 partidas e empate 1.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Com 5 parcelas: 1+1+1+1+1=5

Com 4 parcelas: 1+1+1+2=5

Com 3 parcelas: 1+1+3=5
1+2+2=5

Com 2 parcelas: 1+4=5
2+3=5

São 6 adições.

B

I $\frac{6}{10}.\frac{6}{10}.\frac{6}{10}=\frac{216}{1000}=\frac{27}{125}$

II $\left(\frac{6}{10}.\frac{6}{10}.\frac{3}{10}\right).3=\frac{81}{250}$

9 Demonstre que a soma das raízes e a soma dos quadrados das raízes do polinômio $P(x)=x^3+2x^2+3x+4$ são iguais, ou seja, se a,b,c são as raízes, então $a+b+c=a^2+b^2+c^2$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Temos que:

$a+b+c=-2$

$ab+bc+ac=3$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

Portanto:

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

$a^2+b^2+c^2=(-2)^2-2(3)=-2=a+b+c$

MATEMÁTICA APLICADA

10 Para levantar fundos, uma ONG beneficente está recolhendo garrafas usadas, que pretende vender a uma indústria para serem recicladas. Desde que a campanha começou, há 90 dias, a organização já recolheu 36 toneladas de garrafas, pelas quais a indústria pretende pagar 10 centavos, por quilograma, no final do programa. Assim, se o programa terminasse hoje, a indústria pagaria 360 000 centavos.
Mas, como as garrafas estão acumulando mais do que podem ser recicladas, a indústria vai reduzir 10 centavos por dia o preço que paga por 100 quilogramas de garrafas usadas. Supondo que a organização continue recolhendo as garrafas usadas no mesmo ritmo e que a indústria as compre de uma única vez, resolva as questões.

A Expresse a receita da ONG com a venda de garrafas usadas em função do número de dias a mais que a campanha permaneça em vigor.

B Calcule o número de dias que a ONG deve esperar para encerrar a campanha de modo a conseguir a maior receita possível. Calcule, em reais, o valor da receita máxima.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A $R(t)=(360+4t).(1000-10t)$

$R(t)=-40t^2+400t+360\,000$ centavos.

B $t=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-400}{2(-40)}=5$; $5\,dias$

$R(5)=361\,000$;

R$ 3 610,00.