MATEMÁTICA APLICADA

1

A Temos dois tipos de dados: um com a forma de cubo com as faces numeradas de 1 a 6 e outro com a forma de tetraedro regular com as faces numeradas de 1 a 4. Lançamos o dado cúbico sobre uma mesa e registramos o número da face apoiada sobre a mesa.

- Se resulta um número par, tornamos a lançá-lo e registramos novamente o número da face apoiada sobre a mesa.
- Se resulta um número ímpar, lançamos o outro dado e registramos o número da face apoiada sobre a mesa.

Determine o número de possibilidades para o par de números de faces registradas.

B Com as letras da palavra **SUCINTO**, queremos formar outras com 5 letras distintas.
Quantas palavras podemos formar, tenham ou não sentido?
Se as ordenássemos alfabeticamente, qual seria a posição da palavra **CINTO**?

RESOLUÇÃO

A Com as faces 2, 4 e 6 temos 6 possibilidades cada uma: 3x6 = 18.
Com as faces 1, 3 e 5 temos 4 possibilidades cada uma: 3x4 = 12.
Podem ocorrer 18 + 12 = 30 possibilidades.

B I. $C_{7,5} x 5! = \dfrac{7!}{5!2!} x 5! = 2520$ palavras

II. Com CINO temos as palavras: CINOS, CINOT e CINOU.

Com CINS temos as palavras: CINSO, CINST e CINSU.

A palavras CINTO ocuparia a 7ª posição.

2 Seja o triângulo de vértices $A(1,1), B(4,6)$ e $C(7,2)$. As retas paralelas por cada vértice ao lado oposto formam um triângulo A'B'C'.

I Determine as coordenadas dos vértices do triângulo A'B'C'.

II Demonstre que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes e calcule a razão de semelhança.

RESOLUÇÃO

I Seja r a reta paralela ao lado $\overline{BC}$ que passa pelo ponto $A(1,1)$.

$$y-1=\frac{-4}{3}(x-1) \rightarrow y=\frac{-4}{3}x+\frac{7}{3}.$$

Seja s a reta paralela ao lado $\overline{AC}$ que passa pelo ponto $B(4,6)$.

$$y-6=\frac{1}{6}(x-4) \rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{16}{3}.$$

Seja t a reta paralela ao lado $\overline{AB}$ que passa pelo ponto C (7,2).

$$y-2=\frac{5}{3}(x-7) \rightarrow y=\frac{5}{3}x-\frac{29}{3}.$$

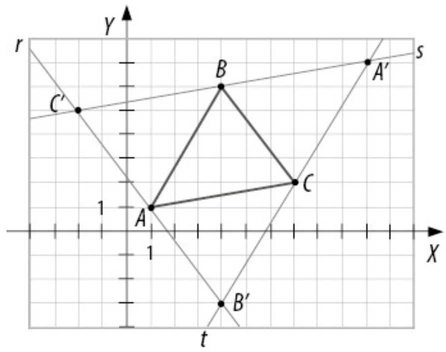
Resolvendo os sistemas de equações s e t, r e t, r e s obtemos os vértices $A'(10,7)$, $B'(4,-3)$ e $C'(-2,5)$ do triângulo $A'B'C'$.

II Os ângulos opostos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ do paralelogramo A'CAB são congruentes.
Analogamente. $\hat{B}\, e\, \hat{B}'\, e\, \hat{C}\, e\, \hat{C}'$ são congruentes e, portanto, os dois triângulos são semelhantes.
Temos que, por exemplo:

$$BC=\sqrt{25}=5$$

$$B'C'=\sqrt{100}=10$$

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{1}{2}$$



A razão de semelhança é $\frac{1}{2}$ ou 2.

3

A Qual é a soma dos algarismos do número $\left(10^{5005n}+2\right)^2$, sendo *n* um número inteiro e positivo? Justifique a resposta.

B É possível determinar um número natural *n* que satisfaça simultaneamente as inequações: $|n|<0,5$ e $\sqrt{n}<2n$? Justifique a resposta.

Resolução

A

$$\left(10^{5005n}+2\right)^2=10^{10010n}+2.10^{5005n}.2+4$$

A soma dos algarismos é igual a: $1+4+4=9$.

B

Resolvemos as duas inequações:

$$|n|<0,5\rightarrow -0,5<n<0,5$$

$$\sqrt{n}<n$$

$$n<n^2$$

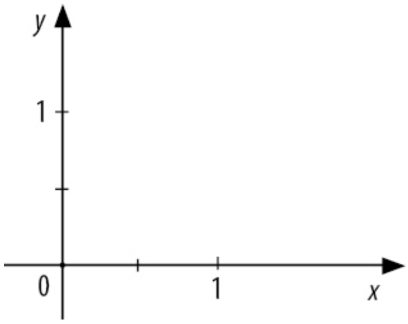
$$n-n^2<0\rightarrow 0<n<1$$

Não existe nenhum número natural que satisfaz simultaneamente as duas inequações

4

A Qual é a área da região formada pelos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem simultaneamente as inequações dadas abaixo?

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x < 1 - x \\ y < 1 - y \\ 1 < 2(x + y) \end{cases}$$



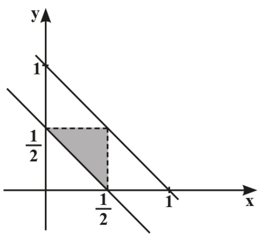
B Partimos uma barra de 1 metro de comprimento em três pedaços. A barra é quebrada em dois pontos escolhidos ao acaso. Qual é a probabilidade de que possamos formar um triângulo com os 3 pedaços?

RESOLUÇÃO

A A solução gráfica das inequações simultâneas é a região triangular de vértices $A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{2}\right) e\, C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuja área é igual a $\frac{1}{8}$.

B Sejam x, y e $1 - (x + y)$ as medidas dos 3 lados do triângulo em que $0 \leq x \leq 1\, e\, 0 \leq y \leq 1$.
Devemos ter: $x < y + (1 - x - y); y < x + 1 - (x + y); 1 - (x + y) < x + y$.

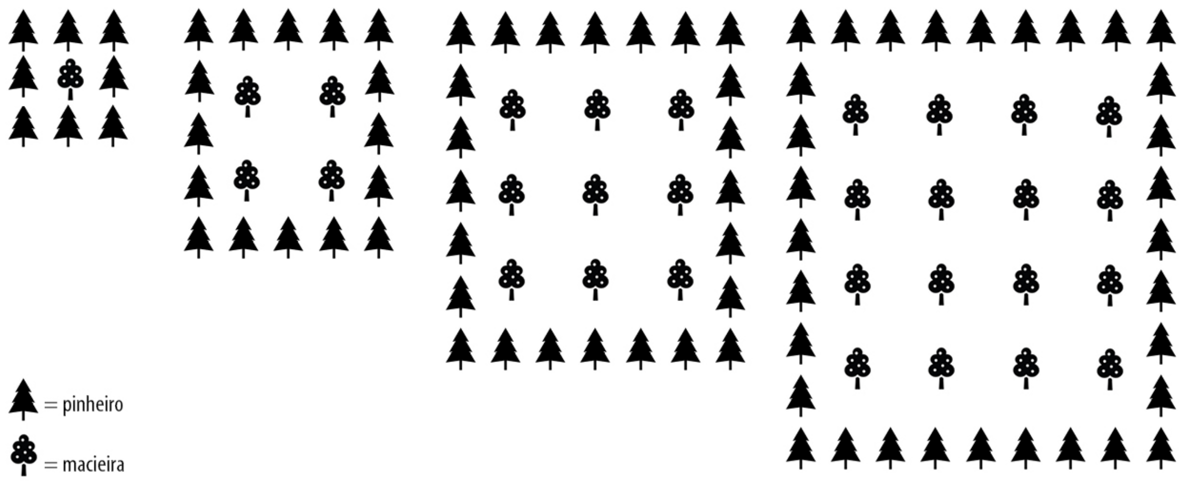
A solução gráfica das inequações simultâneas é a região triangular de vértices $A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{2}\right) e\, C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuja área é igual a $\frac{1}{8}$.



O espaço amostral é a área do triângulo cujos catetos medem 1 e o evento é a área do triângulo cujos catetos medem $\frac{1}{2}$.

A probabilidade de os três pedaços poderem formar um triângulo é igual a: $\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$.

5 Um agricultor planta macieiras em um terreno quadrado. Com o objetivo de proteger as maçãs do vento, planta pinheiros ao redor da totalidade do pomar. O esquema abaixo mostra a colocação das macieiras e dos pinheiros para qualquer número *n* de fileiras de macieiras.



A Escreva duas fórmulas, ambas em termos de *n*, uma para calcular o número de macieiras e a outra para calcular o número de pinheiros.

B A partir de que valor de *n*, o número de macieiras se torna maior que o número de pinheiros?

RESOLUÇÃO

A Número de macieiras = n^2
Número de pinheiros = 8n, onde n é o número de fileiras de macieiras.

B

$$n^2 > 8n$$

$$n^2 - 8n > 0$$

$$n < 0 \quad \boldsymbol{a} \quad n > 8$$

A partir de n = 9.

6 Calcule as cinco raízes complexas da seguinte equação.

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

Resolução

Note por substituição que $x=1$ não é uma raiz da equação.
O primeiro membro da equação expressa a soma dos termos de uma PG de razão x. Portanto:

$$\frac{1.\left(x^6-1\right)}{x-1}=0$$

$$\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x-1}=\frac{\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{x-1}=\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)=0$$

$$x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$x^2-x+1=0 \rightarrow x=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};x=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

7

A Observe os algarismos das unidades da sequência das potências de 3:

$3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81...$

Se $n = 33^{43} + 43^{33}$, qual é o algarismo das unidades de *n*?

B Veja que: $1 - 9.10^{-8} = 0,99999991$.

Demonstre que $\dfrac{0,99999999}{1,0001} - \dfrac{0,99999991}{1,0003} = 2\left(10^{-4}\right)$.

RESOLUÇÃO

A Note que os algarismos das unidades de $33^1, 33^2, 33^3, 33^4, 33^5, 33^6, 33^7\ e\ 33^8$ são respectivamente 3,9,7,1,3,9,7 e 1, e assim sucessivamente.

Como $43 = 10.4 + 3$, o algarismo das unidades de 33^{43} é 7.

Como $33 = 8.4 + 1$, o algarismo das unidades de 43^{33} é 3.

O algarismo das unidades da soma das duas potências é igual ao algarismo das unidades de $7 + 3 = 10$, ou seja, 0.

B

$$\frac{1-10^{-8}}{1+10^{-4}} - \frac{1-9.10^{-8}}{1+3.10^{-4}} =$$

$$\frac{(1+10^{-4})(1-10^{-4})}{1+10^{-4}} - \frac{1-9.10^{-8}}{1+3.10^{-4}} =$$

$$1-10^{-4} - \frac{1-9.10^{-8}}{1+3.10^{-4}} =$$

$$\frac{1+3.10^{-4} - 10^{-4} - 3.10^{-8} - 1 + 9.10^{-8}}{1+3.10^{-4}} =$$

$$\frac{2.10^{-4} + 6.10^{-8}}{1+3.10^{-4}} =$$

$$\frac{2.10^{-4}(1+3.10^{-4})}{1+3.10^{-4}} = 2.10^{-4}$$

8

A Se *k* é um número inteiro ímpar e a mediana de *k* números inteiros consecutivos é 360, qual é o maior valor desses números inteiros consecutivos? Expresse a resposta em termos de *k*.

B A idade média dos integrantes de uma orquestra sinfônica aumentaria 1 ano, se abandonassem a orquestra 5 músicos de 19 anos cada um ou se fossem contratados 5 músicos de 17 anos cada um. É possível essa situação? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO

A Como 360 é a mediana dos k inteiros consecutivos, $\frac{k-1}{2}$ desses valores ficam à direita de 360 quando os valores são listados em ordem crescente.

O maior valor portanto é $\frac{k-1}{2}+360$.

B Suponha que a soma das idades dos n integrantes da orquestra sinfônica é S.

A idade média é portanto: $\frac{S}{n}$.

Pelo enunciado temos que:

$$\frac{S-5(19)}{n-5}=\frac{S}{n}+1 \qquad e \qquad \frac{S+5(17)}{n+5}=\frac{S}{n}+1$$

Portanto:

- $\frac{S-95}{n-5}=\frac{S}{n}+1 \to Sn-95n=Sn-5S+n^2-5n \to 5S=n^2+90n$

- $\frac{S+85}{n+5}=\frac{S}{n}+1 \to Sn+85n=Sn+5S+n^2+5n \to 5S=n^2-80n$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$n^2+90n=n^2-80n \to 170n=0 \to n=0$$

A situação é impossível pois a orquestra não teria nenhum integrante e n tem de ser diferente de zero.

9 Um barco situado nas coordenadas $(-9,-1)$ navega frente a uma margem reta de um embarcadouro que está representada pela equação $y=2-x$.

A Se o barco seguiu a trajetória mais curta, quais são as coordenadas do ponto onde atracou?

B Que distância o barco percorreu até esse ponto?

Resolução

A A trajetória do barco mais curta é perpendicular ao embarcadouro, ou seja, a equação que segue o barco é perpendicular à equação $y=2-x$.

$$y+1=-(-1)x+9$$

Portanto: $y=x+8$

Resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y=2-x \\ y=x+8 \end{cases}$

Obtemos as coordenadas do ponto onde o barco atracou: $(-3,5)$.

B

$$P(-9,-1) \qquad x+y-2=0$$

$$d=\frac{|-9-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$$

10

A Se diminuímos uma quantidade **C** em 10%, que aumento porcentual teremos de aplicar à nova quantidade para obter a quantidade inicial?

B Se um número positivo e inteiro *x* é dividido por um número positivo e inteiro *y*, o resto é 9. Se $\frac{x}{y} = 75,15$, qual é o valor de *y*?

Resolução

A

$$C - 10\%C = 0,9C$$

$$0,9C + p.0,9C = C$$

$$0,9p = 1 - 0,9$$

$$p = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9} = 0,1111... = 11,1111...\%$$

B

$$x = y.q + 9$$

$$\frac{x}{y} = q + \frac{9}{y}$$

$$Como\,\frac{x}{y} = 75,15 = 75 + 0,15\,temos\,que:$$

$$q = 75 \;\; e \;\; \frac{9}{y} = 0,15.$$

$$Por\tan to:$$

$$9 = 0,15y$$

$$y = \frac{9}{0,15} = 60$$