

VESTIBULAR 2012

1ª Fase

RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

GRADE DE CORREÇÃO

A prova de **Raciocínio Lógico-Matemático** é composta por três questões e vale 10 pontos no total, assim distribuídos:

Questão 1 – 3,5 pontos (sendo 1 ponto para o subitem **a**, 1 ponto para o subitem **b** e 1,5 ponto para o subitem **c**).

Questão 2 – 3,5 pontos (sendo 1 ponto para o subitem **a**, 1 ponto para o subitem **b** e 1,5 ponto para o subitem **c**).

Questão 3 – 3,0 pontos (sendo 1 ponto para o subitem **a**, 1 ponto para o subitem **b** e 1 ponto para o subitem **c**).

As respostas deverão **apresentar a resolução completa** das questões. Não basta escrever apenas o resultado final, é necessário mostrar o raciocínio utilizado e os cálculos, quando for o caso.

Questão 1

Segundo um analista de mercado, nos últimos 7 anos, o preço médio dos imóveis por metro quadrado (em R\$ 100) pode ser representado pela equação abaixo (em que t representa o tempo, em anos, variando de $t = -3$ em 2004 a $t = 3$ em 2010):

$$\text{Preço}(t) = -3t^2 + 6t + 50$$

- a) De acordo com o analista, houve uma crise no mercado imobiliário nesse período, em um ano em que o preço dos imóveis por metro quadrado atingiu o valor máximo, decaindo no ano seguinte. Em que ano ocorreu a referida crise?
- b) Um investidor comprou um imóvel de 100 m² no início de 2006, ao preço médio de mercado, e o vendeu, também ao preço médio de mercado, no início de 2009. Qual teria sido a diferença no lucro auferido (em R\$) se tivesse investido, durante o mesmo período de 3 anos, os recursos em um CDB que paga juros compostos de 10% ao ano?
- c) Um investidor comprou um imóvel no início de 2006 e o vendeu no início de 2009. A que taxa anual de juros simples ele deveria ter investido, durante esse período de 3 anos, o valor pelo qual comprou o imóvel em 2006, para obter um lucro equivalente ao obtido com a venda do imóvel em 2009?

Respostas:

- a) A função preço é uma parábola com concavidade para baixo, que tem ponto de máximo em $x = \frac{-b}{2a}$.

Logo, $x = \frac{-6}{-6} = 1$.

A crise ocorreu em 2008.

- b) 2006 corresponde a $t = -1$ e 2009 corresponde a $t = 2$

Preço em 2006:

$$\text{Preço}(-1) = -3.(-1)^2 + 6.(-1) + 50 = 41$$

Preço em 2009:

$$\text{Preço}(2) = -3.(2)^2 + 6.(2) + 50 = 50$$

Valor pago pelo imóvel em 2006: $100 \cdot \text{R\$ } 4.100 = \text{R\$ } 410.000,00$

Valor pago pelo imóvel em 2009: $100 \cdot \text{R\$ } 5.000 = \text{R\$ } 500.000,00$

Lucro com o investimento no imóvel = $\text{R\$ } 500.000 - \text{R\$ } 410.000 = \text{R\$ } 90.000,00$

Lucro com investimento em CDB = $\text{R\$ } 410.000 (1,1^3 - 1) = \text{R\$ } 135.710$.

Diferença de lucro = $\text{R\$ } 135.710 - \text{R\$ } 90.000 = \text{R\$ } 45.710,00$.

Se tivesse investido em CDB, teria um lucro de R\$ 45.710,00 a mais no período de 3 anos.

- c) Preço em 2006: R\$ 41

Preço em 2009: R\$ 50

Taxa de retorno no período = $(50/41 - 1) = 21,95\%$

Como se trata de juros simples, a taxa anual seria de $21,95\%/3 = 7,32\%$ aproximadamente.

Teria que investir a uma taxa de juros simples de 7,32% ao ano.

Grade de pontuação:

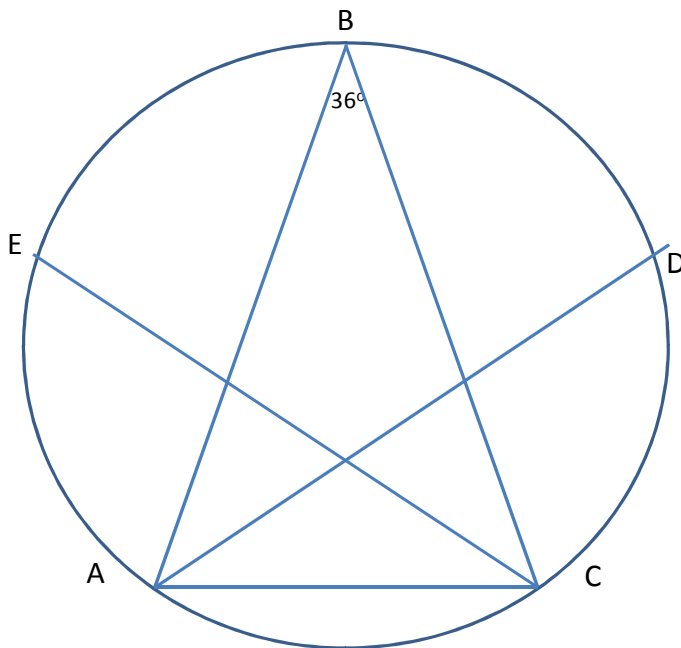
Questão	Categoria de acerto	Padrão utilizado para correção
01.A	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Indicação de procedimento para obter a resposta e montagem do raciocínio. Por exemplo, montagem de correspondência da função (valores de t e anos).
	50%	Cálculo do vértice da parábola, sem conclusão.
	75%	Cálculo correto do vértice da parábola. Interpretação de que a crise ocorreu em 2009.
	100%	Cálculo correto do vértice da parábola. Interpretação de que a crise ocorreu em 2008.
01.B	0%	Em branco OU totalmente errada.
	25%	Resolução incompleta. Obteve o cálculo de Preço (-1) e Preço(2).
	50%	Resolução incompleta. Obteve o valor pago pelo imóvel em 2006 e em 2009.
	75%	Resolução incompleta. Obteve o valor pago pelo imóvel em 2006 e em 2009 e o lucro com o investimento no imóvel.
	100%	Aluno apresenta cálculo e conclui corretamente que, se tivesse investido em CDB, teria um lucro de R\$ 45.710,00 a mais no período de 3 anos.
01.C	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Iniciou a resolução, mas deixou-a incompleta. Indicou os preços do imóvel (em 2006 e 2009).
	50%	Calculou a taxa de retorno no período (21,95%).
	75%	-
	100%	Aluno apresenta cálculo e conclui corretamente que a taxa de juros simples correspondente é de aproximadamente 7,32% ao ano.

Questão 2

- a) Construa um triângulo isósceles cujo ângulo menor seja metade de cada um dos ângulos maiores e nomeie seus vértices de **A**, **B** e **C**, sendo \widehat{ABC} o ângulo menor. Em seguida, desenhe uma circunferência que passe pelos três vértices desse triângulo. Por fim, trace as bissetrizes dos dois ângulos maiores do triângulo; batize de ponto **D** o encontro da bissetriz de \widehat{BAC} com a circunferência e, de ponto **E**, o encontro da bissetriz de \widehat{ACB} com a circunferência. **Notas:** (i) indique a localização dos pontos A, B, C, D e E; (ii) como referência, adote para o segmento de reta AB qualquer tamanho entre 5 e 10 centímetros.
- b) Imagine que a figura construída no item anterior seja a versão, em miniatura, de uma figura na qual o raio da circunferência circunscrita ao triângulo **ABC** mede 2 km. Nesse caso, qual é o comprimento do arco \widehat{BD} ?
- c) Na figura ampliada descrita no item anterior, qual é o perímetro do pentágono AEBDC? Se necessário, adote: $\text{sen}(36^\circ) = 0,59$; $\text{sen}(54^\circ) = 0,81$; $\text{sen}(72^\circ) = 0,95$; $\text{cos}(36^\circ) = 0,81$; $\text{cos}(54^\circ) = 0,59$; $\text{cos}(72^\circ) = 0,31$.

Respostas:

a)



Na figura, $\widehat{ABC} = 36^\circ$; $\widehat{BCA} = 72^\circ$; $\widehat{CAB} = 72^\circ$; $\widehat{ACE} = 36^\circ$; $\widehat{ECB} = 36^\circ$; $\widehat{CAD} = 36^\circ$; $\widehat{DAB} = 36^\circ$.

- b) O comprimento do arco \widehat{BD} corresponde a $1/5$ do comprimento da circunferência, dado por $2 \cdot \pi \cdot r$. Logo, se o raio da circunferência vale 2 km, o comprimento do arco \widehat{BD} vale $0,8\pi$ km.
- c) A partir do triângulo BOD (sendo o ponto O, o centro da circunferência), tem-se que:

$$BD^2 = BO^2 + OD^2 - 2 \cdot BO \cdot OD \cdot \cos 72^\circ$$

$$BD^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,31$$

$$BD = \sqrt{5,52}$$

Logo, o perímetro do pentágono AEBDC é de $5\sqrt{5,52}$ km.

Grade de pontuação:

Questão	Categoria de acerto	Padrão utilizado para correção
02.A	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Iniciou esboço do desenho - vértices do triângulo A, B e C contidos na circunferência.
	50%	Esboçou a figura e a localização dos cinco pontos, com algum erro (por exemplo, trocou a localização do ponto E com a do ponto D).
	75%	Esboçou corretamente a figura e a localização dos cinco pontos.
	100%	Esboçou corretamente a figura, a localização dos cinco pontos e indicou que o triângulo ABC é isóscele.
02.B	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Indicação de procedimento para obter a resposta e cálculo do comprimento total da circunferência.
	50%	Indicação de procedimento para obter a resposta, cálculo do comprimento total da circunferência e erro ao identificar o comprimento do arco \widehat{BD} .
	75%	Indicação de procedimento e raciocínio corretos; erro considerado leve de conta.
	100%	Indicação de procedimento e raciocínio corretos; apresentação da resposta correta.
02.C	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Indicação de procedimento para obter a resposta e montagem do raciocínio.
	50%	Indicação de procedimento para obter a resposta e montagem do raciocínio. Esforço de desenvolvimento com passagens corretas e incorretas.
	75%	Indicação de procedimento para obter a resposta e montagem do raciocínio; erro considerado leve de conta.
	100%	Indicação de procedimento e raciocínio corretos; apresentação da resposta correta.

Questão 3

O compositor A é réu em um processo de plágio. Ele criou uma melodia para um *jingle* de TV que consiste em uma sequência de 4 notas em ordem idêntica a uma melodia registrada anteriormente pelo compositor B. O compositor A declara que não conhecia o trabalho do compositor B e que as semelhanças entre as músicas foram fruto do acaso. Para decidir sobre a plausibilidade desta explicação, um juiz solicitou o cálculo da probabilidade de que a melodia do compositor A tenha a mesma sequência de notas da melodia do compositor B por acaso, considerando que existem sete notas musicais e que cada nota é decidida aleatoriamente e de forma independente pelo compositor. Se a probabilidade for menor que 0,1%, o juiz considerará não ser plausível que tenha ocorrido por acaso, condenando o réu; em caso contrário, o compositor A será considerado inocente.

- a) Qual é a probabilidade de que o compositor A tenha criado por acaso a melodia com a mesma sequência de 4 notas da melodia do compositor B? Com base no critério apresentado acima, o juiz considerará o compositor A inocente ou culpado?
- b) Cada uma das sete notas musicais (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si) pode ter ou não uma alteração cromática (sustenido ou bemol). Assim, cada nota pode aparecer em três diferentes formas, por exemplo, Dó, Dó sustenido ou Dó bemol. Qual é o número mínimo de notas (com alteração cromática) que uma melodia deve ter para que se possa configurar plágio, de acordo com o critério do juiz (probabilidade de coincidência por acaso menor que 0,1%, considerando que cada nota e alteração cromática é escolhida aleatoriamente e independentemente pelo compositor)?
- c) Considere que o juiz estabeleceu um novo critério – condenará o réu, se a probabilidade de que as melodias tenham os trechos observados em comum por acaso for menor que a probabilidade de ganhar em um jogo de loteria em que o apostador escolhe 7 números entre 20 possíveis, e se torna ganhador se estes números incluírem os 3 números sorteados. Qual é a probabilidade de que o apostador ganhe na loteria nessas condições?

Respostas:

- a) A probabilidade de que a mesma sequência de notas tenha sido criada pelo compositor A, por coincidência, é igual a $1/7^4 = 1/2401 = 0,00042$ ou 0,042%. De acordo com o critério estabelecido pelo juiz, o réu seria considerado culpado, já que a probabilidade é menor que 0,1%.
- b) Considerando 21 diferentes combinações (*) de notas e alterações cromáticas (7x3) e sendo n o número de notas de uma melodia, a probabilidade de que ela tenha as mesmas notas e alterações cromáticas de uma melodia já composta, P(n), é igual a:

$P(1) = 1/21 = 4,76\%$ -> probabilidade maior que 0,1%; não permite configurar plágio.
 $P(2) = 1/21^2 = 0,23\%$ -> probabilidade maior que 0,1%; não permite configurar plágio.
 $P(3) = 1/21^3 = 0,011\%$ -> probabilidade menor que 0,1%; permite configurar plágio.

Uma melodia deve ter, no mínimo, 3 notas com alterações cromáticas, para que seja possível configurar plágio, de acordo com o critério do juiz.

(*) Se o aluno utilizar conhecimento prévio de música, pode argumentar que, de fato, há apenas 12 diferentes combinações de notas e alterações cromáticas e não 21. Ainda assim, seria necessário ter, no mínimo, 3 notas com alterações cromáticas, para que seja possível configurar plágio.

$P(1) = 1/12 = 8,33\%$ -> probabilidade maior que 0,1%; não permite configurar plágio.
 $P(2) = 1/122 = 0,69\%$ -> probabilidade maior que 0,1%; não permite configurar plágio.
 $P(3) = 1/123 = 0,06\%$ -> probabilidade menor que 0,1%; permite configurar plágio.

- c) Com 7 números escolhidos pelo apostador, há $\binom{7}{3}$ combinações possíveis de três números. Com os 20 números possíveis no sorteio, há $\binom{20}{3}$ possíveis resultados. Portanto, a probabilidade de que o indivíduo ganhe é de

$$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{20!}{3!17!} = \frac{35}{1140} = 0,031 \text{ ou } 3,1\%.$$

A probabilidade de que o apostador ganhe nestas condições é de 3,1%.

Grade de pontuação:

Questão	Categoria de acerto	Padrão utilizado para correção
03.A	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Algum indício de entendimento do enunciado da questão ou esboço (tentativa) de montagem da solução.
	50%	Cálculo correto e conclusão errada (concluir que o compositor é inocente).
	75%	Algum pequeno erro de conta.
	100%	Cálculo correto, contas corretas e conclusão correta.
03.B	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Algum indício de entendimento do enunciado da questão ou esboço (tentativa) de montagem da solução.
	50%	Cálculo correto e conclusão errada (concluir que o número de notas necessárias fosse menor ou maior que 3).
	75%	Algum pequeno erro de conta.
	100%	Cálculo correto, contas corretas e conclusão correta.
03.C	0%	Em branco OU questão totalmente errada.
	25%	Algum indício de entendimento do enunciado da questão ou esboço (tentativa) de montagem da solução.
	50%	-
	75%	Algum pequeno erro de conta.
	100%	Cálculo correto, contas corretas e conclusão correta.